த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண் — 460

# ரீமன் தொகை கணிதம்

ஆசிரியர்

வை. செல்வமுத்து,

கணிதத் துணைப் பேராசிரியர்,

மாநிலக் கல்லூரி,

சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—May, 1973

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 460

© Tamil Nadu Text Book Society

# RIEMANN INTEGRALS

V. SELVAMUTHU

Price Rs. 3-50

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.'

*Printed by*
KUMARAN PRESS,
298, Mint Street,
Madras-1.

# அணிந்துரை

**திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்**
(தமிழகக் கல்வி-உள்ளாட்சித் துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பன்னிரண்டாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்ல வேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'ரீமன் தொகை கணிதம்' என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 460 ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 495 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

# பொருளடக்கம்


| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | பக்கம் |
| 1. | வரையறுத் தொகைகள் | ... | 1 |
| 2. | வரையறுத்த தொகைகள் | ... | 5 |
| 3. | தகாத் தொகைகள் | ... | 43 |
| 4. | இரண்டாம் வகை தகாத் தொகைகள் | ... | 74 |
| 5. | பொதுத் தகாத் தொகைகள் | ... | 101 |
| 6. | ஃபுருல்லானியின் தொகை | ... | 107 |
| 7. | பீற்ரு, காமா சார்புகள் | ... | 116 |
| | மேற்கோள் நூற்பட்டியல் | ... | 133 |
| | கலைச்சொற்கள் | ... | 134 |

# 1. வரையருத் தொகைகள்

## (Indefinite Integrals)

சார்புகளின் தொகைகளை

(1) வரையருத் தொகைகள் (indefinite integrals)

(2) வரையறுத்த தொகைகள் (definite integrals)

என இரு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம். இரண்டிற்குமிடையே நெருங்கிய தொடர்பு இருப்பினும், அடிப்படை விளக்கத்தில் இரண்டும் வெவ்வேறானவை.

முதலில் வரையருத் தொகையின் விளக்கத்தைக் கவனிப்போம்

$y = f(x)$ என்ற சார்பின், $x$ ஐப் பொறுத்த வகைக்கெழு $\phi(x)$ என்றால்,

$$\frac{dy}{dx} = \phi(x)$$

$$\phi(x) = \underset{h \to 0}{Lt} \; \frac{f(x+h) - f(x)}{n}$$

என அறிவோம்.

இவ்வாறு, கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $f(x)$-ன் வகைக் கெழு $\phi(x)$ ஐக் கணக்கிடுவது வகைப்படுத்தல் (derivation) எனப்படும். இதற்கு எதிர்மாறாக, $\phi(x)$ ஐ வகைக்கெழுவாகக் கொண்ட சார்பு $f(x)$ ஐக் கண்டு பிடிப்பது 'வரையருத் தொகைப்படுத்தல்' (indefinite integration) எனப்படும்.

இவ்வாறு வகைப்படுத்தலும், தொகைப்படுத்தலும் எதிர் மாறானவை.

இங்கு $f(x)$ ஐ $\phi(x)$-ன் மூலத் தொகை (primitive) என அழைக்கிறோம்.

$$= \int \phi(x)\, dx = f(x) \text{ என எழுதுகிறோம்.}$$

$c$ என்பது ஏதாவதொரு மாறிலி (constant) என்றால் $f(x) + c$-ன் வகைக் கெழுவும் $\phi(x)$ தான். எனவே $f(x) + c$-ம் $\phi(x)$-ன் மூலத் தொகைதான். இதனால்தான் இத் தொகையை வரையறுத் தொகை எனக் குறிப்பிடுகிறோம். $f(x) + c$ ஐ முழு மூலத் தொகை (complete primitive) என அழைக்கிறோம்.

$$\therefore \quad \int \phi(x)\; dx = f(x) + c$$

குறிப்பு 1 : வகைப்படுத்தலும், தொகைப்படுத்தலும் எதிர் மாறானவை ஆதலால், சார்புகளின் வகைக் கெழுக்களின் வாய் பாடுகளிலிருந்து கீழ்க்கண்ட வரையறுத் தொகைகளை உடனடியாக எழுதிவிடலாம்.

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c; \qquad n \neq 1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + c; \qquad x > 0$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x \;\; dx = \tan x + c$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x \;\; dx = -\cot x + c$$

$$\int \sec x \;\; \tan x\;\; dx = \sec x + c$$

$$\int \operatorname{cosec} x \;\; \cot x\; dx = -\operatorname{cosec} x + c$$

$$\int e^x\, dx = e^x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$$

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x + c$$

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + c$$

$$\int \tan x \, dx = \log \sec x + c$$

$$\int \cot x \, dx = \log \sin x + c$$

$$\int \sec x \, dx = \log (\sec x + \tan x) + c$$

$$= \log \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + c$$

$$\int \operatorname{cosec} x \, dx = \log (\operatorname{cosec} x - \cot x) + c$$

$$= \log \tan \frac{x}{2} + c$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log x} + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a} + c.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\frac{x}{a} + c$$

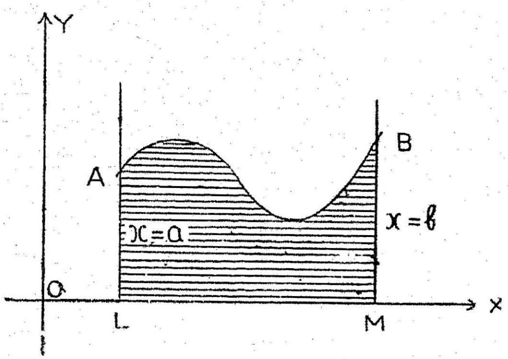
$$\int \sqrt{x^2-a^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{a} + c$$

குறிப்பு 2 : வகைப்படுத்தலைப் போன்று, தொகைப்படுத்தல் எளிதானதல்ல. வகைப்படுத்தலுக்கென்று, தெளிவாக வகுக்கப் பட்ட வழி முறைகள் உள்ளன. ஆனால் தொகைப் படுத்தலைப் பொறுத்த மட்டில் அவ்வாறல்ல. மொத்தமாகச் சில முறைகளைக் கூறி விடுகின்றனர். அவற்றுள் கொடுக்கப்பட்ட கணக்கிற்குப் பொருத்தமான, எளிதான முறையைத் தேர்ந்தெடுப்பது சற்று சிரமம்தான். அது மட்டுமல்ல, அம் முறைகளால், எல்லாச் சார்பு களின் தொகைகளையும் கணக்கிட இயலாது.

# 2. வரையறுத்த தொகைகள்

## (Definite Integrals)

இது வரை, 'தொகைப்படுத்தல் என்பது வகைப்படுத்தலுக்கு எதிர்மறையானது' என்ற அடிப்படையில் விளக்கமளித்தோம். ஆனால், கணித வரலாற்றின் ஆரம்பத்தில், 'தொகைப்படுத்தல்' என்பது, 'தொகுத்தல், கூட்டுதல்' என்ற பொருளில்தான் வழங்கி வந்துள்ளது. 'Integrate' என்ற ஆங்கில வார்த்தைக்குத் 'தொகுத்தல், கூட்டுதல்' என்றுதான் பொருள் கூறப்பட்டுள்ளது. பரப்பளவை, ஒரு கூட்டுத் தொகையின் எல்லை மதிப்பாக (limiting value) கணக்கிடுவதில்தான் தொகை நுண் கணிதமே (integral calculus) பிறந்தது. தொகைப்படுத்தலுக்குரிய '$\int$' சின்னமும், ஆங்கில வார்த்தை 'Sum' என்பதன் முதல் எழுத்து




படம் 1.

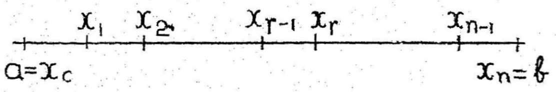
*S*-ன் திரித்த வடிவம்தான். $y = f(x)$ என்ற சார்பு, ஒரு சம தளத்தில், தொடர்ச்சியான வளைவரையைக் குறிக்குமானால், அவ்

வளைவரை $X$ அச்சு, $x = a$, $x = b$ என்ற நேர்கோடுகள் ஆகியவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பரப்பளவை $\int_a^b f(x)\,dx$ என்ற வரையறுத்த தொகை குறிப்பிடும்.

இவ் விளக்கம் வடிவ கணிதத்தின் (geometry) அடிப்படையில் அமைந்துள்ளது. தொடர்ச்சியான வளைவரைகளால் குறிப்பிட முடியாத சார்புகளின் தொகையைக் கணக்கிட இவ் விளக்கம் பொருந்தாது.

எனவே, வரையறுத்த தொகைக்குப் புதிய விளக்கம் — வரையறை (definition) — தேவைப்பட்டது. வடிவ கணிதத்தின் துணையின்றி, எண் கணிதத்தை (arithmatic) மட்டும் அடிப்படையாகக் கொண்ட, வரையறையை முதன் முதலில் தந்தவர் கணிதமேதை ரிச்சர்டு ரீமன் ஆவார்.

**ரீமனின் வரையறை** (Riemann's Definition) :




படம் 2.

$[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் (closed interval) வரையறுக்கப்பட்ட, வரம்புள்ள ஒரு சார்பு $f(x)$ என்க. அதன் மேல் வரம்பு (upper bound) $M$ எனவும், கீழ் வரம்பு (lower bound) $m$ எனவும் கொள்க. $\{a, x_1, x_2, \dots x_{n-1}, b\}$ என்ற புள்ளிக் கணத்தால் (set of points) $[a, b]$ ஐச் சிறு சிறு இடைவெளிகளாகப் பிரித்திடுக. இதனை $[a, b]$-ன் ஒரு பகுப்பு முறை '(a mode of division) என அழைக்கிறோம். $(x_{r-1}, x_r)$ என்ற சிறு இடைவெளியில், $f(x)$-ன் மேல் வரம்பு $M_r$ எனவும், கீழ் வரம்பு $m_r$ எனவும் கொள்க. $(r = 1, 2, 3, \dots, n-1)$. இப்பொழுது,

$$S = \sum_{r=1}^{n} M_r (x_r - x_{r-1})$$

$$s = \sum_{r=1}^{n} m_r (x_r - x_{r-1})$$

என்ற இரு கூட்டுத் தொகைகளையும் கணக்கிடுக. இவை, முறையே தோராய மேற் தொகை (upper approximate sum), தோராயக் கீழ்த் தொகை (lower approximate sum) எனப்படும். $[a, b]$ ஐ மற்றொரு புள்ளிக் கணத்தால் பிரித்தால், இத் தோராயத் தொகைகளின் மதிப்புகள் மாறும். ஆனால் எல்லாப் பகுப்பு முறைகளிலும்,

$$M \geqslant M_r$$

$m \leqslant m_r$ என்பதை அறிவோம்.

எனவே,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{r=1}^{n} M_r (x_r - x_{r-1}) \\ &\geqslant \Sigma\, m_r (x_r - x_{r-1}) \\ &\geqslant m \sum_{r=1}^{n} (x_r - x_{r-1}) \\ &\geqslant m (b - a) \end{aligned}$$

$m(b-a)$-ன் மதிப்பு, இடைவெளி $[a, b]$-ன் பகுப்பு முறையைச் சார்ந்ததல்ல.

இவ்வாறு $[a, b]$-ன் பல்வேறு பகுப்பு முறைகளிலும் மேற் தொகைகளுக்கு, ஒரு கீழ் வரம்பு இருப்பதைக் காண்கிறோம். அக் கீழ் வரம்பிற்கு, $f(x)$-ன் ரீமன் மேல் தொகை (upper Riemann integral) என்பது பெயராகும்.

அதனை, $J = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$ என எழுதுகிறோம்.

இதேபோன்று $s \leqslant M(b-a)$ என நிறுவி, கீழ்த் தொகைகளுக்கு ஒரு மேல் வரம்பு இருப்பதை அறியலாம். அம் மேல் வரம்பிற்கு, $f(x)$-ன் ரீமன் கீழ்த் தொகை (lower Riemann integral) என்பது பெயராகும்.

அதனை, $I = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx$ என எழுதுகிறோம்.

இவ்விரு ரீமன் தொகைகளும் சமமனுல், அதாவது $I = J$ என்ருல், $[a, b]$-ல் $f(x)$ ஐ ரீமன் வழியில் தொகைப்படுத்த முடியும் என்று கூறுகிரும். அப் பொது மதிப்பிற்கு $f(x)$-ன் ரீமன் தொகை (Riemann integral) என்பது பெயர்.

அதனை, $\int_a^b f(x)\,dx$ என எழுதுகிரும்.

**குறிப்பு 1 :** $m(b-a) \leqslant s \leqslant S \leqslant M(b-a)$ என்பதை எளிதில் உணரலாம்.

**குறிப்பு 2 :** இங்கு $f(x)$ ஐ ஒரு வரம்புள்ள சார்பு எனக் குறிப்பிட்டோம். இதனுல் வரம்புள்ள சார்புகள் அனைத்தையும் தொகைப்படுத்த முடியும் என்று பொருளல்ல. இந்த உண்மையைக் கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டு மூலம் நிறுவலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு**

$(0 \leqslant x \leqslant 1)$ என்ற இடைவெளியில்,

$x$-ன் விகிதமுறு மதிப்புகளுக்கு $f(x) = 0$
$x$-ன் விகிதமுரு ,, $= 1$ } என்க.

$\therefore$ $f(x)$, ஒரு வரம்புள்ள சார்பாகும்.

$I = 0,\ J = 1.$

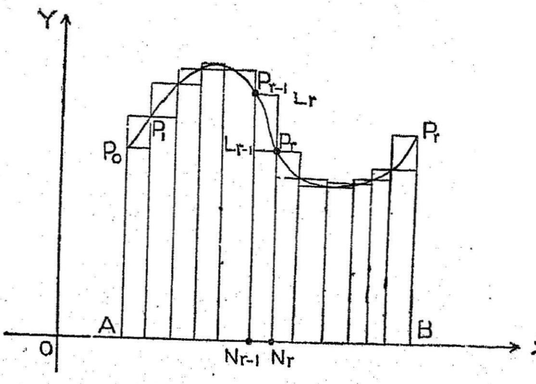
i.e., $I \neq J$

$\therefore$ $f(x)$ ஐத் தொகைப்படுத்த முடியாது.

**குறிப்பு 3 :** வரையறுத்த தொகை காண்பதும், வரையருத் தொகை காண்பதும் முற்றிலும் வேறுபட்ட வழிமுறைகளாகும். ஒரு சார்பின் வரையறுத்த தொகையின் இயல்புகளை (properties) ஆராய, அதன் மூலத்தொகையை அறிந்திருக்க வேண்டியதில்லை. ஆயினும், வரையறுத்த தொகையின் மதிப்பைக் கணக்கிட, மூலத் தொகை வழி செய்கிறது.

**குறிப்பு 4 :** தொகைப் படுத்தத்தக்க ஒரு சார்பு $f(x)$ ஐ வளைவரையால் குறிப்பிட முடியுமானல், வரையறுத்த தொகை $\int_a^b f(x)\,dx$-ன், வடிவ கணித விளக்கத்தையும், ரீமன் வரை

யறையிலிருந்து, காணலாம். சார்பு $y = f(x)$-ன் வரைபடம், படத்தில் காட்டியவாறு அமைந்துள்ளதாகக் கொள்வோம்.




படம் 3.

நாம் எடுத்துக்கொண்ட பகுப்பு முறையில் $P_{r-1}(x_{r-1}, y_{r-1})$ $P_r(x_r, y_r)$ என்க.

$\therefore \quad M_r(x_r - x_{r-1}) =$ செவ்வகம் $N_{r-1}\ N_r\ P_{r-1}\ L_r$-ன் பரப்பளவு.

$m_r(x_r - x_{r-1}) =$ செவ்வகம் $N_{r-1}\ N_r\ P_r\ L_{r-1}$-ன் பரப்பளவு.

$N_{r-1}\ N_r\ P_{r-1}\ L_r$ — போன்ற வெளிச் செவ்வகங்களின் (outer rectangles) பரப்பளவுகளின் கூட்டுத் தொகையே $S$ ஆகும்.

$N_{r-1}\ N_r\ P_r\ L_{r-1}$ — போன்ற உட்செவ்வகங்களின் (inner rectangles) பரப்பளவுகளின் கூட்டுத் தொகையே $s$ ஆகும்.

$[a, b]$-ல் பல்வேறு பகுப்பு முறைகளை எடுத்தால், $S$, $s$-ன் மதிப்புகள் மாறும். ஆயினும் எல்லாப் பகுப்பு முறைகளிலும், $S$, $s$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளுக்கு இடையில்தான், நாம் குறிப்பிடும் பரப்பளவு (i.e., வளைவரை, $X$ அச்சு, $x = a$, $x = b$ ஆகியவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பரப்பளவு) அமைந்திருக்கும்.

$$\text{i.e.,} \quad s \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant S.$$

**தேற்றம் :** $I$-ன் மதிப்பு, $J$-ன் மதிப்பைவிட உயர்ந்திருக்க முடியாது.

$$\text{i.e.,} \quad I \leqslant J.$$

**நிரூபணம் :** இடைவெளி $[a, b]$ஐ $\{a_1, x_1, x_2 \dots x_{n-1}, b\}$ என்ற புள்ளிக் கணத்தால், சிறு இடைவெளிகளாகப் பிரித்திடுக. இப்பகுப்பு முறையில், தோராயத் தொகைகள் $S$, $s$ என்க. இடைவெளிகள் $(a, x_1)$, $(x_1, x_2)$, ..., $(x_{n-1}, b)$ ஆகியவற்றை இன்னும் சிறிய இடைவெளிகளாகப் பிரித்திடுக.

அப்புள்ளி கணம்,

$$\{ a, y_1\ y_2, \dots y_{k-1}, x_1, y_{k+1}, y_{k+2}, \dots y_{l-1}, x_2, \dots b \}$$

என்க.

இப் பகுப்பு முறையில் தோராயத் தொகைகள் $S'$, $s'$ என்க. இப் பகுப்பு முறை முதல் பகுப்பு முறைக்கு அடுத்துள்ள முறை (consecutive mode of division) எனக் கூறுகிறோம். இடைவெளி $(a_1\ y_1)$-ல் $f(x)$-ன் வரம்புகள் $M_1'$, $m_1'$ என்றும், $(y_1, y_2)$-ல் $M_2'$, $m_2'$ என்றும், ... (இவ்வாறு தொடர்ந்து) $(y_{k-1}, x_1)$-ல் $M_k'$, $m_k'$ என்றும் கொள்க. இந்த இடைவெளிகளில் கணிக்கப்படும் மேற் தொகை

$$= M_1'(y_1 - a) + M_2'(y_2 - y_1) + \dots + \dots + M_k'(x_1 - y_{k-1})$$

$(a, x_1)$-ல் $f(x)$-ன் மேல் வரம்பு $M_1$ என்றால்,

$$M_1' \leqslant M_1 \qquad i = 1, 2, \dots k$$

$$\therefore \text{ இக் கூட்டுத் தொகை } \leqslant M_1(y_1 - a) + M_1(y_2 - y_1) + \dots + M_1(x_1 - y_{k-1})$$
$$\leqslant M_1(x_1 - a)$$

இவ்வாறு $(a, x_1)$-ல் கணிக்கப்படும் $S'$-ன் மதிப்பு, $M_1(x_1 - a)$-க்குக் குறைந்து உள்ளது. இதே போன்று $(x_1, x_2)$-ல் கணிக்கப்படும் $S'$-ன் மதிப்பு $M_2(x_2 - x_1)$-க்குக் குறைவாக இருக்கும். $(x_2, x_3)$, $(x_3, x_4)$, ..., $(x_{n-1}, b)$ ஆகிய எல்லா இடை வெளிகளிலும் இதே நிலைமைதான்.

எனவே, $S' \leqslant S$.

இதே முறையில் $s' \geqslant s$ என்றும் நிறுவலாம். இவ்வாறு ஒரு பகுப்பு முறையில், பகுப்புப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையை அதிகரிப்பதால் $S$-ன் மதிப்பு உயர்வதில்லை ; $s$-ன் மதிப்பு குறைவதில்லை.

இப்பொழுது $[a, b]$-ல் எவையேனும் இரண்டு பகுப்பு முறைகளை எடுத்துக்கொள்வோம். $\{ a, x_1, x_2, \dots x_{n-1}, b \}$ என்ற புள்ளிக்

கணத்தைக் கொண்ட முதல் பகுப்பு முறையில், தோராயத் தொகைகள் $S$, $s$ என்க.

$\{ a, y_1, y_2, \dots y_{n-1}, b \}$ என்ற புள்ளிக் கணத்தைக் கொண்ட இரண்டாம் பகுப்பு முறையில் தோராயத் தொகைகள் $S'$, $s'$ என்க.

இவ்விரு புள்ளிக் கணங்களால் ஆன மூன்றும் பகுப்பு முறை $\{ a, x_1, y_1, \dots, x_r, y_s, \dots b \}$ -ல் தோராயத் தொகைகள் $\Sigma$, $\sigma$ என்க.

முதலாவது அல்லது இரண்டாவது பகுப்பு முறையில் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையை அதிகரித்து, மூன்றும் பகுப்பு முறையை ஏற்படுத்தியதாகக் கருதலாம். எனவே மூன்றும் பகுப்பு முறை, முதல் இரு பகுப்பு முறைகளுக்கும், தனித்தனியே அடுத்துள்ளது.

எனவே, $S \geqslant \Sigma \qquad S' \geqslant \Sigma$

$s \leqslant \sigma \qquad s' \leqslant \sigma$

$\Sigma \geqslant \sigma$ என்பது வெளிப்படை.

$\therefore \quad S \geqslant s' \quad \& \quad S' \geqslant s$

இவ்வாறு, எந்த மேற்தொகையின் மதிப்பும், வேறெந்தக் கீழ்த் தொகையின் மதிப்பிற்கும் குறைந்ததல்ல. எனவே மேற்தொகைகளின் கீழ் வரம்பு, கீழ்த் தொகைகளின் மேல் வரம்பிற்குக் குறைந்ததல்ல.

i.e., $J \geqslant I$

**குறிப்பு:** $[a, b]$-ல் $f(x)$-ன் வரம்புகள் $M$, $m$ என்றால்,

$$m(b-a) \leqslant s \leqslant I \leqslant J \leqslant S \leqslant M(b-a).$$

**டார்போவின் தேற்றம்** (Darboux's theorem)

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சிறு மிகை எண் $\epsilon$ என்றால், அதற்குத் தக்க $\theta$ என்ற ஒரு மிகை எண்ணை, $\theta$-விலும் குறைந்த நீளமுள்ள சிறு இடைவெளிகளைக் கொண்ட எந்தப் பகுப்பு முறையிலும், $S - J < \epsilon$, $I - s < \epsilon$ என அமையும்படி காணலாம்.

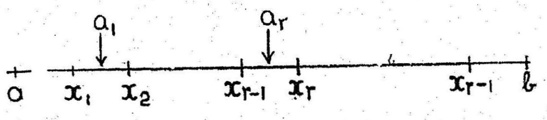
அதாவது, எல்லாச் சிறு இடைவெளிகளின் நீளங்களும் பூச்சியத்தை அணுகும் வகையில், அவைகளின் எண்ணிக்கை கந்தழியை அணுகினால், $s$-ம் $S$-ம் முறையே $I$, $J$ ஐ அணுகும்.

நிரூபணம் : முதலில் மேற்தொகைகளை ($S$) ஆராய்வோம். அவைகளின் கீழ் வரம்பு $J$ ஆதலின், $J+\epsilon$ ஐ விடக் குறைந்த மதிப்புள்ள மேற்தொகையைக் கொண்ட ஒரு பகுப்பு முறை இருக்கும். அப் பகுப்பு முறையை $D_1$ எனவும், அதிலுள்ள புள்ளிக் கணம் $\{a, a_1, a_2, \ldots a_{p-1}, b\}$ எனவும் கொள்க. இதில் மேற்தொகை $S_1$ என்க.

$$\therefore \quad S_1 < J + \epsilon$$

$D_1$-ல் உள்ள எல்லாச் சிறு இடைவெளிகளின் நீளங்களையும் விடக் குறைந்ததாக, $\theta$-ன் மதிப்பை எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$\theta$ஐ விடக் குறைந்த நீளமுள்ள சிறு இடைவெளிகளைக் கொண்ட மற்றோர் பகுப்பு முறை $D_2$ ஐ எடுத்துக் கொள்க. அதிலுள்ள புள்ளிக் கணம் $\{a, x_1, x_2, x_{n-1}, b\}$ என்க. அதில், மேற்தொகை $S_2$ என்க.




படம் 4.

இப்பொழுது, $D_1$-ல் உள்ள எல்லா இடைவெளிகளின் நீளங்களும் $\theta$ஐ விட அதிகம்.

$D_2$-ல் உள்ள எல்லா இடைவெளிகளின் நீளங்களும் $\theta$ஐ விடக் குறைவு.

எனவே $D_2$-ல் உள்ள எந்த இடைவெளியிலும், $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_{p-1}$ ஆகிய புள்ளிகளில் இரண்டிற்கு மேல் இருக்க முடியாது. எனவே $D_2$-ல் இப் புள்ளிகளை உள்ளடக்கிய இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கை அதிக பட்சம் $2(p-1)$ ஆகும். அந்த இடைவெளிகளில் கணிக்கப்பெறும் மேற் தொகைகளின் மதிப்பும், $\{2(p-1)\ \bar{u}\ \theta\}$ -க்குக் குறைவாக இருக்கும். (இங்கு $\bar{u}$ என்பது $(a, b)$-ல் $|f(x)|$-ன் மேல் வரம்பாகும்.) $D_2$-ன் மற்ற இடைவெளிகள், $D_1$-ன் இடைவெளிகளுக்கு உள்ளடங்கியவை. எனவே அவைகளிலிருந்து கணிக்கப்படும் மேற்தொகையின் மதிப்பு, $S_1$-க்குக் குறைவாக இருக்கும்.

ஆகவே, $D_2$ பகுப்பு முறையில்,

$$S_2 \leqslant 2(p-1)\theta\,\bar{u} + S_1$$
$$< 2(p-1)\theta\,\bar{u} + J + \epsilon$$

எனவே $\theta$-ன் மதிப்பை, $\dfrac{\epsilon}{2\bar{u}\,(p-1)}$ -க்குக் குறைவாக அமைத்துக் கொண்டால்,

i.e., $\theta < \dfrac{\epsilon}{2\bar{u}\,(p-1)}$ எனக் கொண்டால்

$$S_2 < \epsilon + J + \epsilon$$
$$< J + 2\epsilon$$
$$\therefore\ S_2 - J < 2\epsilon$$

இவ்வாறே $\theta'$ என்னும் ஒரு மிகை எண்ணை எடுத்துக் கொண்டு, $\theta'$ ஐ விடக் குறைந்த நீளமுள்ள சிறு இடைவெளிகளைக் கொண்ட மற்ருெரு பகுப்பு முறையில் $I - s < \epsilon$ என நிருபிக்கலாம். $\theta, \theta'$ ஆகிய இரண்டையும் விடக் குறைந்த மற்ருெரு மிகை எண் $\theta''$ ஐ எடுத்துக் கொண்டு, $\theta''$ ஐ விடக் குறைந்த நீளமுள்ள இடைவெளிகளைக் கொண்ட ஒரு பகுப்பு முறையில் $S - J < \epsilon$ & $I - s < \epsilon$ என நிறுவலாம்.

**குறிப்பு 1 :** $(a, b)$-ல் உள்ள ஒரு பகுப்பு முறையில் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையை அதிகரிப்பதால் $S$-ன் மதிப்பு உயர்வதில்லை. $s$-ன் மதிப்பு குறைவதில்லை என்பதை அறிவோம். எனவே, சிறு இடங்களின் நீளங்கள் பூச்சியத்தை அணுகும் விதத்தில், புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை கந்தழியை அணுகுமாயின்,

$$S \rightarrow J \ \&\ s \rightarrow I$$

இவ்வாறு, $I$-ம் $J$-ம், முறையே, $s$, $S$-ன் வரம்புகள் மட்டுமல்ல; அவைகளின் எல்லை (limit) மதிப்புகளுமாம்.

**குறிப்பு 2 :** $f(x)$, ஒரு தொகைப் படுத்தத்தக்க சார்பு என்ருல், $I = J$.

$$\therefore\ S\text{-ம்},\ s\text{-ம்} \int_a^b f(x)\,dx \text{ ஐ அணுகும்.}$$

**குறிப்பு 3 :** $(x_{r-1}, x_r)$ என்ற இடைவெளியிலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $\xi_r$ என்ருல் $(r = 1, 2, \ldots, n)$.

$m_r \leqslant f(\xi_r) \leqslant M_r$.

$$\therefore \quad \sum_{r=1}^{n} m_r (x_r - x_{r-1}) \leqslant \sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)(x_r - x_{r-1})$$

$$\leqslant \sum_{r=1}^{n} M_r (x_r - x_{r-1})$$

$$\text{i.e.,} \quad s \leqslant \sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)(x_r - x_{r-1}) \leqslant S.$$

எனவே, $f(x)$, தொகைப் படுத்தத்தக்க சார்பு என்றால், எல்லாச் சிறு இடைவெளிகளின் நீளங்கள் $| x_r - x_{r-1} |$ பூச்சியத்தை அணுகும் வகையில், $n$ கந்தழியை அணுகினால்,

$$\sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)(x_r - x_{r-1})$$

என்ற கூட்டுத்தொகை,

$$\int_a^b f(x)\, dx \text{ ஐ அணுகும்.}$$

i.e. அனைத்து $| x_r - x_{r-1} | \to 0$ என்றால்,

$$\underset{n \to \infty}{Lt} \sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)(x_r - x_{r-1}) = \int_a^b f(x)\, dx \text{ ஆகும்.}$$

**தேற்றம் :** இடைவெளி $[a, b]$-ல், $f(x)$ ஐத் தொகைப்படுத்துவதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதும் ஆன நிபந்தனையாவது; கொடுக்கப்பட்ட ஒரு மிகை எண் $\in$-க்குத் தக்க $[a, b]$-ன் ஒரு பகுப்பு முறையில், $S - s < \in$ என அமையும்.

**நிபந்தனையின் தேவை :**

$f(x)$ ஐத் தொகைப்படுத்த முடியுமாதலால், $I = J$.

$\therefore$ டார்போர்வின் தேற்றத்தின்படி, $\in$-க்குத் தக்க ஒரு பகுப்பு முறையில்,

$$S - J < \frac{\epsilon}{2}$$

$$I - s < \frac{\epsilon}{2}$$ என அமையும்.

$$\therefore \quad S - I < \frac{\epsilon}{2}$$

$$I - s < \frac{\epsilon}{2}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad S - s &= \{S - I\} + \{I - s\} \\ &< |S - I| + |I - s| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

**நிபந்தனை போதுமானது :**

$S - s < \epsilon$ என்க.

$s \leqslant I \leqslant J \leqslant S$ என்பதை அறிவோம்.

$$\therefore \quad J - I \leqslant S - s < \epsilon$$

$$I = J.$$

i.e., $f(x)$ ஐத் தொகைப்படுத்தலாம்.

**குறிப்பு :** '$S - s$' ஐ அலைவுத் தொகை (oscillatory sum) என அழைக்கிறோம்.

**தொகைப் படுத்தத்தக்க சார்புகள்** (integrable functions)

**தேற்றம் 1 :** ஒரு மூடிய இடைவெளியில் தொடர்ச்சியான சார்புகளைத் தொகைப்படுத்தலாம்.

$f(x)$, தொடர்ச்சியான சார்பு ஆதலால், அதன் வரம்பு அலைவு (oscillation), $\epsilon$-க்குக் குறைவாக அமையும்படி $[a, b]$ஐச் சிறு இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கலாம். அத்தகைய ஒரு பகுப்பு முறை $\{a, x_1, x_2, \ldots x_{r-1}, x_r, \ldots x_{n-1}, b\}$ என்க. ஒவ்வொரு சிறு இடையிலும்,

$$M_r - m_r < \frac{\epsilon}{b - a}, \quad r = 1, 2, \ldots n.$$

$$\therefore \quad S - s = \sum_{r=1}^{n} (M_r - m_r)(x_r - x_{r-1})$$

$$< \Sigma \in (x_r - x_{r-1})$$

$$< \in \Sigma (x_r - x_{r-1})$$

$$< \in (b - a)$$

$\therefore \quad f(x)$ ஐத் தொகைப்படுத்தலாம்.

குறிப்பு : $f(d) = c$ (மாறிலி) என்ருல், $(a, b]$-ன் எந்தப் பகுப்பு முறையிலும், சிறு இடைவெளிகளில் $M_r = m_r = c$ ஆகும்.

$\therefore \quad M_r - m_r = 0.$

$\therefore \quad S - s = 0.$

$\therefore$ மாறிலியைத் தொகைப்படுத்தலாம்.

**தேற்றம் 2 :** வரம்புடைய ஓரியல்பு (monotonic) சார்புகளைத் தொகைப்படுத்தலாம்.

$f(x)$ வரம்புடைய ஓர் ஏறும் சார்பு (monotonic increasing function) என்க.

$\dfrac{\in}{f(b) - f(a)}$ -க்குக் குறைந்த மதிப்புள்ள ஒரு மிகை எண் $\delta$ ஐக் காண்க.

$$\therefore \quad \delta < \frac{\in}{f(b) - f(a)}$$

$[a, b]$ ஐ $\delta$ நீளமுள்ள சமநீள சிறு இடைவெளிகளாகப் பிரித்திடுக. அப் பகுப்பு முறை $\{ a, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, b \}$ என்க. $f(x)$ ஏறும் சார்பு ஆதலின், $[x_{r-1}, x_r]$-ல்

$$M_r = f(x_r)$$

$$m_r = f(x_{r-1}) \qquad r = 1, 2, \ldots n.$$

$$\therefore \quad S - s = \sum_{r=1}^{n} (M_r - m_r)(x_r - x_{r-1})$$

$$= \Sigma [f(x_r) - f(x_{r-1})] \delta$$

$$= \delta \sum_{r=1}^{n} [f(x_r) - f(x_{r-1})]$$

$$= \delta [f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots$$
$$\cdots + f(b) - f(x_{r-1})]$$

$$= \delta [f(b) - f(a)]$$

$$< \in.$$

$f(x)$, ஓர் இறங்கும் சார்பு (monotonic decreasing function) என்ருல், இவ்வாறே, $S - s < \in$ என நிறுவலாம்.

எனவே ஓரியல்புச் சார்புகளைத் தொகைப்படுத்தலாம்.

**தேற்றம் 3:** வரம்புடைய ஒரு சார்பு, தொடர்ச்சியற்று (discontinuous) இருந்தால், தொடர்ச்சியற்ற புள்ளிகளை உள்ளடக்கிய சிறு இடைவெளிகளின் மொத்த நீளம் $\in$-க்குக் குறைவாக இருக்குமாஞல், அச் சார்பைத் தொகைப்படுத்தலாம்.

$[a, b]$-ல் வரம்புடைய ஒரு சார்பு $f(x)$ என்க. $f(x)$, தொடர்ச்சியற்றிருக்கும் புள்ளிகளை உள்ளடக்கிய சிறு இடைவெளிகளை '$d$' இடைவெளிகள் என அழைப்போம். மற்ற இடைவெளிகளை, '$[a, b] - d$' இடைவெளிகள் என அழைக்கலாம். $d$ இடைவெளிகளின் மொத்த நீளம் $\in$-க்குக் குறைவாக உள்ளது என்க.

$$\text{i.e.,} \quad \sum_{'d'} (x_r - x_{r-1}) < \in$$

'$[a, b] - d$' இடைவெளிகளில் $f(x)$ தொடர்ச்சியான சார்பாகும். எனவே இவ்விடைவெளிகளில் $f(x)$-ன் வரம்பு அலைவு $\in$-க்குக் குறைவாக இருக்கும்.

$$\text{i.e.,} \quad M_r - m_r < \in$$

இப்பொழுது $S - s = \sum (M_r - m_r)(x_r - x_{r-1})$

$$= \sum_{'d'} (M_r - m_r)(x_r - x_{r-1})$$

$$+ \sum_{'[a, b] - d'} (M_r - m_r)(x_r - x_{r-1})$$

$[a, b]$-ல் $f(x)$-ன் வரம்புகள் $M, m$ என்றால் $d$ இடைவெளிகளில் $M_r - m_r \leqslant M - m$.

$$\therefore \quad S - s < \sum_{`d'} (M - m)(x_r - x_{r-1})$$

$$+ \sum_{`[a,b]-d'} \in (x_r - x_{r-1})$$

$$< (M - m) \sum_{`d'} (x_r - x_{r-1})$$

$$+ \in \sum_{`[a,b]-d'} (x_r - x_{r-1})$$

$$< (M - m) \in + \in . (b - a)$$

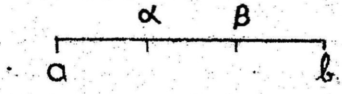
$$< (M - m + b - a) \in .$$

$\therefore$ $[a, b]$-ல், $f(x)$ ஐத் தொகைப்படுத்தலாம்.

**குறிப்பு :** $f(x)$, வரம்புடைய சார்பாதலால், அதன் தொடர்ச்சியற்ற புள்ளிகள் எளியவை (Simple discontinuity).

**தேற்றம் 4 :** இடைவெளி $[a, b]$-ல் $f(x)$ ஐத் தொகைப்படுத்த முடியுமாயின், $[a, b]$-க்குள் அடங்கிய எந்தச் சிறு இடைவெளியிலும் $f(x)$ ஐத் தொகைப்படுத்த முடியும்.

$[a, b]$-யினுள் அடங்கிய ஓர் இடைவெளி $[\alpha, \beta]$ என்க.




படம் 5.

$[a, b]$-ல் $f(x)$ ஐத் தொகைப்படுத்த முடியுமாதலால், $S - s < \in$ என அமையும் வகையில், $[a, b]$ ஐச் சிறு இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கலாம். $\alpha, \beta$ ஐப் பகுப்புப் புள்ளிகளாகக் (points of division) கொண்ட அத்தகைய பகுப்பு முறை ஒன்றை எடுத்துக்கொள்க. $[\alpha, \beta]$-ல் $f(x)$-ன் தோராயத் தொகைகள் $S', s'$ என்க.

$a < \alpha < \beta < b$ ஆதலின்,

$$S' - s' \leqslant S - s$$

$$< \in$$

$\therefore$ $f(x)$ ஐ $[\alpha, \beta]$-ல் தொகைப்படுத்தலாம்.

**தேற்றம் 5 :** $[a, b]$-ல் $f(x)$ ஐத் தொகைப்படுத்த முடியுமானால், $g(x)$ என்ற மற்றொரு சார்பு, சில புள்ளிகளில் மட்டும் $f(x)$-க்குச் சமமில்லாமல் இருக்குமாயினும், $g(x)$ ஐயும் தொகைப்படுத்த முடியும்.

$$\text{மேலும்} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx \text{ ஆகும்.}$$

சில புள்ளிகளில் மட்டுமே $f(x) \neq g(x)$ ஆதலால், அப்புள்ளிகள் இருக்கும் சிறு இடைவெளிகளை எல்லாம் சேர்த்து, மொத்தத்தில் $\epsilon$ ஐ விடக் குறைந்த நீள இடைவெளிக்குள் இருக்கும்படி, ஒரு பகுப்புமுறையைக் கையாளலாம். எனவே அப்புள்ளிகளைக் கொண்ட இடைவெளிகளில் $S - s < k\,\epsilon$ என நிறுவலாம். $[a, b]$-ன் மீதிப் பகுதியில் $f(x) = g(x)$ ஆதலால் அப்பகுதியில் $S - s < \epsilon$ என்பது தெளிவாகும். இவ்வாறு $[a. b]$-ல் $g(x)$ ஐயும் தொகைப்படுத்தலாம். மேலும், $f(x) = g(x)$ என்றுள்ள பகுதியில், ஓர் இடைவெளி $(x_{r-1}, x_r)$-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $\xi_r$ என்றால்,

$$f(\xi_r) = g(\xi_r).$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)(x_r - x_{r-1}) = \sum_{r=1}^{n} g(\xi_r)(x_r - x_{r-1})$$

எனவே இந்த இடைவெளிகள் அனைத்தின் நீளங்கள் $|x_r - x_{r-1}|$, பூச்சியத்தை அணுகும் வகையில், $n$ கந்தழியை அணுகினால்,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx \text{ ஆகிறது.}$$

**குறிப்பு :** $f(x) \neq g(x)$ ஆக உள்ள இடைவெளிகளின் மொத்த நீளம் $\epsilon$-க்குக் குறைவாதலின், அவ்விடைவெளிகளில், $f(x)$, $g(x)$-ன் தொகைகள் பூச்சியத்தை அணுகும்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

$(\pi, 0)$ என்ற இடைவெளியில் $f(x) = \sin x$ என்க.

$$\left.\begin{array}{l} 0 < x < \pi/2 \\ \pi/2 < x < \pi \end{array}\right\}\text{-ல்} \qquad \begin{array}{ll} g(x) & = \sin x \\ g(0) & = a \\ g(\pi/2) & = b \\ g(\pi) & = c \text{ என்க.} \end{array}$$

இங்கு, $x = 0,\ \pi/2,\ \pi$ என்ற 3 புள்ளிகளில் மட்டும் $f(x) \neq g(x)$. $(0, \pi)$-லுள்ள மற்றப் புள்ளிகளில் $f(x) = g(x)$

$$\therefore \int_0^{\pi} f(x)\, dx = \int_0^{\pi} g(x)\, dx.$$

**எடுத்துக்காட்டு 1 :**

$x$-ன் விகிதமுறு மதிப்புகளுக்கு $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

,, விகிதமுரு ,, ,, $= 1 - x$ என்றால்.

$(0, 1)$-ல் $f(x)$-ன் ரீமன் தொகைகளைக் காண்க.

$$(\sqrt{1 - x^2})^2 - (1 - x)^2 = 2x(1 - x)$$

$$> 0 \quad \because \ (0 < x < 1)$$

$$\therefore \ (0 < x < 1)\text{-ல்} \quad \sqrt{1 - x^2} > 1 - x.$$

$(0, 1)$ ஐ, $\Delta x$ நீளமுள்ள, $n$ சிறு இடைவெளிகளாகப் பிரித்திடுக. ஒவ்வொரு சிறு இடைவெளியிலும்,

$$M_r = \sqrt{1 - x^2}$$

$$m_r = 1 - x$$

$$\therefore \ J = \underset{\substack{n \to \infty \\ \Delta x \to 0}}{Lt} \sum_{r=1}^{n} M_r \, \Delta x.$$

$$= Lt \sum \sqrt{1 - x^2}\, \Delta x$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

$$= \left[ \frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \sin^{-1} x \right]_0^1 = \frac{4}{\pi}$$

இவ்வாறே $I = \underset{\substack{n \to \infty \\ \triangle x \to 0}}{Lt} \sum_{r=1}^{n} (1 - x) \triangle x$

$$= \int_0^1 (1 - x)\, dx = \frac{1}{2}.$$

$(0, 1)$-ல் ரீமன் மேல் தொகை $J = \pi/4$

கீழ்த்தொகை $I = 1/2$.

$I \neq J$ $\therefore$ $f(x)$ ஐத் தொகைப்படுத்த முடியாது.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x$-ன் மிகை முழு எண் (positive integral) மதிப்புகளுக்கு

$$f(x) = 0 \;;$$

$x$-ன் மற்ற மதிப்புகளுக்கு $f(x) = 1$ என்க.

$m$ ஒரு மிகை முழு எண் என்றால், $(0, m)$-ல் $f(x)$ ஐத் தொகைப்படுத்த முடியுமா என ஆராய்க.

$x = 1$-ல் $f(1) = 0$

$$f(1-0) = f(1+0) = 1.$$

$\therefore$ $x = 1$-ல், $f(x)$ தொடர்ச்சியற்றது. இவ்வாறே $x = 2, 3, 4, \ldots, m$ என்ற புள்ளிகளிலும், $f(x)$ தொடர்ச்சியற்றது.

இப் புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றையும், $\frac{\epsilon}{m}$-க்குக் குறைந்த நீளமுள்ள, சிறு இடைவெளிகளுக்குள் அடக்குக.

$\therefore$ அவ்விடைவெளிகளின் மொத்த நீளம்

$$< m \cdot \frac{\epsilon}{m} < \epsilon.$$

$\therefore$ $(0, m)$-ல் $f(x)$ ஐத் தொகைப்படுத்தலாம்.

**வரையறுத்த தொகைகளின் இயல்புகள்** (Properties of Definite Integrals) :

$[a, b]$-ல் வரம்புடைய தொகைபடத்தக்க ஒரு சார்பு $f(x)$ என்க.

வரையறுத்த தொகையின் வரையறையிலிருந்து

$$\text{(i)} \quad \int_a^b dx = b - a$$

$$\text{(ii)} \quad \int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$$

$$\text{(iii)} \quad \int_a^b k f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx \quad (k \text{ ஒரு மாறிலி})$$

என எளிதில் நிறுவலாம்.

இதிலிருந்து $\int_a^a f(x)\, dx = 0$ எனக் காணலாம்.

**வழித்தேற்றம் 1 :**

$[a, b]$-லுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $c$ என்றால்

$$\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

$c$ ஐப் பகுப்புப் புள்ளியாகக் கொள்ளாத, ஒரு பகுப்பு முறையை $[a, b]$-ல் எடுத்துக் கொள்க. அதில் $c$ ஐயும் ஒரு பகுப்புப் புள்ளியாகச் சேர்த்துக் கொள்வதால், $S$-ன் மதிப்பு உயர்வதில்லை.

இடைவெளிகள் $(a, c)$, $(c, b)$-லுள்ள தோராய மேற் தொகைகள் முறையே,

$\int_a^c f(x)\,dx$, $\int_c^b f(x)\,dx$, $D$ஐவிட அதிக மதிப்பு பெற்றிருக்கும்.

எனவே, $[a, b]$-ல்

$$\left.\begin{aligned} S &\geqslant \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \\ \text{இவ்வாறே} \quad s &\leqslant \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

$[a, b]$-ல் $f(x)$ஐத் தொகைப்படுத்த முடியுமாதலால்,

$$S - s < \epsilon$$

$$\& \qquad s \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant S.$$

எனவே, சமமின்மைகள் $(1)$-லிருந்து,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^c + \int_c^b$$

$$\int_a^b \qquad \leqslant \int_a^c + \int_c^b$$

எனக் காண்கிறோம்.

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

**வழித்தேற்றம் 2 :**

$[a, b]$-ல் $f(x)$, $g(x)$ ஆகிய இரு சார்புகளையும் தொகைப் படுத்த முடியுமானால், இடைவெளியிலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளிலும் $f(x) \geqslant g(x)$ என்றால்,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

$(x_{r-1}, x_r)$ என்ற சிறு இடைவெளியில், $f(x)$-ன் வரம்புகள் $M_r$ $m_r$, எனவும், $g(x)$-ன் வரம்புகள் $M_r'$, $m_r'$ எனவும் கொள்க.

$f(x) \geqslant g(x)$ ஆதலால்,

$M_r \geqslant M_r'$

$m_r \geqslant m_r'$

$\therefore$ $S \geqslant S'$ என்பதால் $J \geqslant J'$

$I = J$ & $I' = J'$ ஆதலால், $J$ அல்லது $I \geqslant J'$ அல்லது $I'$

i. e., $$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

**வழித்தேற்றம் 3**

$[a, b]$-ல் $f(x)$ஐத் தொகைப்படுத்த முடியுமானால், $|f(x)|$ ஐயும் தொகைப்படுத்தலாம். மேலும்,

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

எந்தப் பகுப்பு முறையிலும், $|f(x)|$-ன் அலைவுத் தொகை, $f(x)$-ன் அலைவுத் தொகையை விடக் குறைவாக இருக்கும்.

$f(x)$ஐத் தொகைப்படுத்த முடியுமானால், அதன் அலைவுத் தொகையின் மதிப்பு $\epsilon$-க்குக் குறைவாக இருக்கும். $|f(x)|$-ன் அலைவுத் தொகையின் மதிப்பு அதைவிடக் குறைவாக இருக்கும். எனவே $|f(x)|$ ஐயும் தொகைப்படுத்தலாம்.

மேலும், $[a, b]$ யிலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளிலும்

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|.$$

$$\therefore \quad -\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

$$\text{i. e.,} \quad \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

**குறிப்பு :** இதன் மறுதலை உண்மை அல்ல. அதாவது, $|f(x)|$ ஐத் தொகைப்படுத்த முடியுமானால், $f(x)$ ஐயும் தொகைப்படுத்தலாம் என்று கூற முடியாது.

எடுத்துக்காட்டாக $[a, b]$-ல்,

$x$-ன் விகிதமுறு மதிப்புகளுக்கு $f(x) = 1$

,, விகிதமுறா ,, ,, $= -1$ என்க.

எந்தச் சிறு இடைவெளியிலும்,

$M_r = 1; \quad m_r = -1$

$$\therefore \quad S - s = \Sigma (M_r - m_r)(x_r - x_{r-1})$$
$$= 2\,\Sigma (x_r - x_{r-1})$$
$$= 2(b-a) \nless \epsilon.$$

$\therefore$ $f(x)$ ஐத் தொகைப்படுத்த முடியாது.

இங்கு $x$-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும்,

$$|f(x)| = 1.$$

$$\therefore \quad M_r = m_r = 1.$$

$$S - s = 0.$$

$\therefore$ $|f(x)|$ ஐத் தொகைப்படுத்தலாம்.

**வழித்தேற்றம் 4 :**

$[a, b]$-ல் $f(x)$ ஐயும் $g(x)$ ஐயும் தொகைப்படுத்த முடியுமானால், $f(x) + g(x)$ ஐயும் தொகைப் படுத்தலாம்.

$(x_{r-1}\ x_r)$ என்ற சிறு இடைவெளியில் $f(x)$, $g(x)$, $f(x)+g(x)$ ஆகியவற்றின் வரம்புகள் முறையே, $M_r$, $m_r$; $M_r'$, $m_r'$; $\overline{M}_r$, $\overline{m}_r$ என்க.

$$\therefore\quad m_r \leqslant f(x) \leqslant M_r$$

$$m_r' \leqslant g(x) \leqslant M_r'$$

$$\therefore\quad m_r + m_r' \leqslant f(x) + g(x) \leqslant M_r + M_r';\ r = 1, 2, \ldots n$$

என்வே, $\overline{M}_r \leqslant M_r + M_r'$

$$\overline{m}_r \geqslant m_r + m_r'$$

$f(x)$, $g(x)$, $f(x)+g(x)$-ன் தோராயத் தொகைகள் முறையே $S, s$ ; $S', s'$ ; $\Sigma, \sigma$ என்றால்,

$$\left.\begin{aligned} \Sigma &\leqslant S + S' \\ \sigma &\geqslant s + s' \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots\ (1)$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad \Sigma - \sigma &\leqslant (S+S') - (s+s') \\ &\leqslant (S-s) + (S'-s') \\ &< \epsilon + \epsilon. \end{aligned}$$

$\therefore$ $f(x)+g(x)$ ஐத் தொகைப்படுத்தலாம்.

சமமின்மைகள் (1)-லிருந்து,

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\}\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx.$$

என்பதை அறியலாம்.

**துணை முடிவு :** $f_1(x), f_2(x), \ldots\ldots f_p(x)$ ஆகிய சார்புகளைத் தொகைப்படுத்த முடியுமானால், அவைகளின் கூட்டுச் சார்பையும் தொகைப்படுத்தலாம். மேலும்,

$$\int_a^b \{f_1 + f_2 + \cdots + f_p\}\ dx = \int_a^b f_1\ dx + \ldots\ldots + \int_a^b f_p\ dx$$

**வழித்தேற்றம் 5 :**

$f(x)$, $g(x)$ ஆகிய இரு சார்புகளையும் தொகைப்படுத்த முடியுமானால், $\{ f(x) \cdot g(x) \}$ ஐயும் தொகைப்படுத்தலாம்.

முதலில், $f(x)$, $g(x)$ என்ற இரண்டும் மிகைச் சார்புகள் (positive functions) எனக் கொள்வோம்.

சிறுவெளி $(x_{r-1}, x_r)$-ல் $f(x)$, $g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$-ன் வரம்புகள் முறையே, $M_r$, $m_r$ ; $M_r'$ $m_r'$ ; $\overline{M}_r$, $\overline{m}_r$ என்க.

$\therefore$ $(x_{r-1}, x_r)$-ல்

$$0 \leqslant m_r \leqslant f(x) \leqslant M_r$$

$$0 \leqslant m_r' \leqslant g(x) \leqslant M_r'$$

$$\therefore\ 0 \leqslant m_r m_r' \leqslant f(x)\, g(x) \leqslant M_r M_r' ; \quad r = 1, 2, \ldots n.$$

$$\therefore\ 0 \leqslant m_r m_r' \leqslant \frac{\overline{M}_r}{\overline{m}_r} \leqslant M_r M_r'$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{M}_r - \overline{m}_r &\leqslant M_r M_r' - m_r m_r' \\ &\leqslant M_r M_r' - M_r m_r' + M_r m_r' - m_r m_r' \\ &\leqslant M_r (M_r' - m_r') + m_r' (M_r - m_r)\end{aligned}$$

$[a, b]$-ல் $f(x)g, (x)$-ன் மேல் வரம்புகள் முறையே $M$, $M'$ என்றால்,

$$\overline{M}_r - \overline{m}_r \leqslant M (M_r' - m_r') + M' (M_r - m_r)$$

$$\therefore\ \Sigma (\overline{M}_r - \overline{m}_r)(x_r - x_{r-1}) < M \Sigma (M_r' - m_r')(x_r - x_{r-1}) + M' \Sigma (M_r - m_r)(x_r - x_{r-1})$$

$f(x)$, $g(x)$, $f(x)\, g(x)$-ன் தோராயத் தொகைகள் முறையே, $S, s$ ; $S', s'$ ; $\Sigma, \sigma$ என்றால்,

$$\begin{aligned}\Sigma - \sigma &\leqslant M (S' - s') + M' (S - s) \\ &< M \epsilon + M' \epsilon. \\ &< (M + M') \epsilon\end{aligned}$$

$\therefore$ $\{ f(x)\, g(x) \}$ ஐத் தொகைப்படுத்தலாம்.

$f(x)$, $g(x)$ மிகைச் சார்புகளாக இல்லாவிடில், $c_1$, $c_2$ என்ற மிகை மாறிலிகளைச் சேர்த்து, $f(x) + c_1$, $g(x) + c_2$ ஆகிய மிகைச் சார்புகளை உருவாக்கலாம்.

$\therefore \quad \{ f(x)+c_1 \} \quad \{ g(x)+c_2 \}$ ஐத் தொகைப்படுத்தலாம்.

$$[ f(x)+c_1 ] \, [ g(x)+c_2 ] = f(x) . g(x) + c_1 \, g(x) + c_2 . f(x) + c_1 \, c_2$$

$\because \quad \{ c_1 \, g(x)+c_2 \, f(x)+c_1 \, c_2 \}$ ஐத் தொகைப்படுத்தலாம்.

$\therefore \quad f(x) \cdot g(x)$ ஐத் தொகைப்படுத்தலாம்.

**துணை முடிவு 1 :** $f(x)$, $g(x)$ என்ற இரண்டையும் தொகைப் படுத்த முடியுமானல், $(a, b)$-ன் எந்தப் புள்ளியிலும் $g(x) \neq 0$ என்ருல், $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ஐத் தொகைப்படுத்தலாம்.

**துணை முடிவு 2 :** மேற்கண்ட முடிவுகளிலிருந்து, தொகைப் படுத்தக்கூடிய, பல சார்புகளின் பல்லுறுப்புக் கோவையை (polonomial), தொகைப் படுத்தலாம் என்பதை அறியலாம்.

**எடுத்துக்காட்டு :**

$$\left( \frac{1}{r+1} < x < \frac{1}{r} \right)\text{-ல்} \quad f(x) = (-1)^{r-1}$$

$x = \dfrac{1}{r}$-ல் $f(x) = 2 \quad r = 1, 2, 3 \ldots$ என்ருல்,

$(0, 1)$-ல் $f(x)$ ஐத் தொகைப்படுத்த முடியும் என நிறுவுக.

$\displaystyle\int_0^1 f(x) \, dx$ காண்க.

$$f\left(\frac{1}{r}\right) = 2$$

$$f\left(\frac{1}{r} + 0\right) = (-1)^{r-2}$$

$$f\left(\frac{1}{r} - 0\right) = (-1)^{r-1}$$

$\therefore \quad x = \dfrac{1}{r}$-ல் $f(x)$ தொடர்ச்சியற்றது.

அதாவது, $x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ ஆகிய புள்ளிகளில் $f(x)$ தொடர்ச்சியற்றது. இப் புள்ளிகளை முறையே, $\epsilon, \frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2^2}, \frac{\epsilon}{2^3}, \ldots$ ஐ விடக் குறைந்த நீளமுள்ள இடைவெளிகளுக்குள் அடக்குக. அந்த இடைவெளிகளின் மொத்த நீளம்

$$< \epsilon + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2^2} + \ldots$$

$$< \epsilon\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right)$$

$$< \frac{\epsilon}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$< 2\epsilon$$

$\therefore$ $(0, 1)$-ல் $f(x)$ ஐத் தொகைப்படுத்தலாம்.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \underset{n \to \infty}{Lt} \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-1}} f(x)\,dx + \int_{\frac{1}{n-1}}^{\frac{1}{n-2}} f(x)\,dx$$

$$+ \ldots + \int_{\frac{1}{r+1}}^{\frac{1}{r}} f(x)\,dx + \ldots + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx.$$

i.e., $$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx = \sum_{r=1}^{n-1} \int_{\frac{1}{r+1}}^{\frac{1}{r}} f(x)\,dx$$

$$= \sum \int (-1)^{r-1}\,dx$$

$$= \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{r-1} \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1} \right]$$

$$= \sum \frac{(-1)^{r-1}}{r} + \sum_{1} (-1)^{r} \frac{1}{r+1}$$

$$= \left[ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \dots \right] + \left[ -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \dots \right]$$

$$= \left[ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \dots \right] + \left[ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \dots \right] - 1$$

$$= 2 \log 2 - 1.$$

**முதல் இடை மதிப்புத் தேற்றம்** (First mean value theorem) :

$[a, b]$-ல் வரம்புடைய தொகைப்படுத்தத் தக்க இரு சார்புகள் $f(x)$, $g(x)$ என்றால், இடைவெளி முழுவதும், $g(x)$ மிகைச் சார்பாக அல்லது குறை சார்பாக இருப்பின் (அதாவது $g(x)$-ன் குறியீடு (sign) மாறாமலிருப்பின்)

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \mu \int_a^b g(x)\, dx$$

இங்கு $\mu$ என்பது, $f(x)$-ன் வரம்புகளுக்கு இடைப்பட்ட ஓர் எண்ணாகும்.

$(a, b)$-ல் $f(x)$-ன் வரம்புகள் $M$, $m$ என்க.

$$\therefore \quad m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

எனவே $g(x) > 0$ என்றால்,

$$m\, g(x) \leqslant f(x) \cdot g(x) \leqslant M \cdot g(x)$$

$g(x) < 0$ என்றால்,

$$m\, g(x) \geqslant f(x) \cdot g(x) \geqslant M\, g(x)$$

இவ்வாறு $g(x) \gtrless 0$ என்பதற்கிணங்க, $[a, b]$-ல்

$$m\, g(x) \lesseqgtr f(x)\; g(x) \lesseqgtr M \cdot g(x)$$

$$\therefore \quad m\int_a^b g(x)\,dx \lessgtr \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \lessgtr M\int_a^b g(x)\,dx$$

எனவே, $m$, $M$ என்பவைகளுக்கு இடைப்பட்ட $\mu$ என்ற ஓர் எண்

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

என்ற சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும்.

**துணைமுடிவு :** $f(x)$ தொடர்ச்சியான சார்பாயின், $[a, b]$-ல் உள்ள $\xi$ என்ற ஒரு புள்ளியில் $\mu = f(\xi)$ என அமைந்திருக்கும்.

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

குறிப்பாக $g(x) = 1$ என்றால்,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b dx$$

$$= f(\xi)\,(b - a).$$

**எடுத்துக்காட்டு 1 :**

முதல் இடை மதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $x > 0$ என்றால்,

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$$

என நிறுவுக.

$$f(y) = \frac{1}{1+y} \text{ என்க.}$$

$(0, x)$-ல் $f(y)$-ன் கீழ் வரம்பு $(m) = \dfrac{1}{1+x}$

மேல் வரம்பு $(M) = 1$.

$$\therefore \quad (0, x)\text{-ல் } \frac{1}{1+x} < f(y) < 1.$$

$$\therefore \quad \int_0^x \frac{1}{1+x}\,dy < \int_0^x \frac{dy}{1+y} < \int_0^x 1\,dy$$

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x.$$

**எடுத்துக்காட்டு 2 :**

$n > 1$ என்றால்,

$$0.5 < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} < 0{\cdot}524$$

என நிறுவுக.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} \text{ என்க.}$$

$(1 - x^{2n})$-ன் மீச்சிறு (minimum) மதிப்பிற்கு, $f(x)$, மீப்பெரு (maximum) மதிப்பை அடையும்.

$\left(0, \frac{1}{2}\right)$-ல் $n$-ன் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கு $x^{2n}$ ஓர் இறங்கும் சார்பாகும்.

எனவே, $n$-ன் குறைந்த மதிப்பான $n = 1$ என்றால், $x^{2n}$, மீப்பெரு மதிப்பை $(x^2)$ அடையும். எனவே, $f(x)$-ன் மேல் வரம்பு $(M) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $n$-ன் மதிப்பு கந்தழியை அணுகும்போது, $x^{2n}$-ன் மதிப்பு பூச்சியத்தை அணுகுகிறது.

$\therefore$ $f(x)$-ன் கீழ் வரம்பு $(m) = 1$.

$\therefore$ $\left(0, \frac{1}{2}\right)$-ல்

$$1 < f(x) < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \int_0^{1/2} dx < \int_0^{1/2} f(x)\,dx < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{1}{2} < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \left[\sin^{-1} x\right]_0^{1/2}$$

$$\frac{1}{2} < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \frac{\pi}{6}$$

$$\text{i.e., } 0{\cdot}5 < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} < 0{\cdot}524$$

$$\left(\because \quad \pi = \frac{22}{7}\right).$$

**எடுத்துக்காட்டு**

$e^x$, $x$ ஆகிய சார்புகளைக் கொண்டு, $(-1, 1)$-ல் முதல் இடை மதிப்புத் தேற்றத்தை ஆராய்க.

$f(x) = e^x$, $g(x) = x$ என்க.

இரண்டும் தொடர்ச்சியான சார்புகள்.

$(-1, 0)$-ல் $g(x) < 0$

$(0, 1)$-ல் $g(x) > 0$.

எனவே $(-1, 1)$-ல் $g(x)$-ன் குறியீடு (sign) மாறுகிறது. தேவையான நிபந்தனையை $g(x)$ பூர்த்தி செய்யவில்லை.

எனவே $\mu = f(\xi)$ என அமையும்படி, $(-1, 1)$-ல் $\xi$ என்ற புள்ளி கிடையாது.

எனவே தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த முடியாது. ஆனால், $f(x) = x$, $g(x) = e^x$ என எடுத்துக்கொண்டால், நிபந்தனைகள் பூர்த்தியாகின்றன.

$\{(-1, 1)$-ல் $g(x) > 0\}$

$$\therefore \int_{-1}^{1} x\, e^x\, dx = \xi \int_{-1}^{1} e^x\, dx$$

$$\frac{2}{e} = \xi\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

$$\xi = \frac{2}{e^2 - 1}.$$

$$\therefore \quad -1 \leqslant \xi \leqslant 1.$$

$\therefore \quad \psi(x)$ ஒரு மாறிலியாகும்.

அதனை $c$ என்க.

$$\therefore \quad \psi(x) = F(x) - \phi(x) = c$$

$$\therefore \quad F(x) = \phi(x) + c$$

$$\therefore \quad F(a) = \phi(a) + c$$

$$F(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$ ஆதலால்,

$$\phi(a) + c = 0$$

$$\therefore \quad c = -\phi(a)$$

$$\therefore \quad F(x) = \phi(x) - \phi(a)$$

குறிப்பாக, $F(b) = \phi(b) - \phi(a)$

i.e., $\int_a^b f(x)\,dx = \phi(b) - \phi(a)$.

குறிப்பு : தொகைக் கணிதத்தில் இத் தேற்றங்கள் அடிப் படை முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை.

முதல் தேற்றத்திலிருந்து, சார்பு $f(x)$ தொடர்ச்சியாக இருப் பினும், இல்லாவிடினும், அதன் தொகை $F(x)$ எப்பொழுதும் தொடர்ச்சியாக இருக்கும் என்பதை அறிகிறோம்.

இரண்டாம் தேற்றத்திலிருந்து, $f(x)$ தொடர்ச்சியான சார்பாக இருந்தால் மட்டுமே, அதன் தொகை $F(x)$ஐ வகைப் படுத்த முடியும் என்பதை அறிகிறோம். மேலும் எந்தத் தொடர்ச்சி யான சார்பையும், மற்றொரு தொடர்ச்சியான சார்பின் வகைக் கெழுவாக எழுதலாம் என்பதையும் காணலாம்.

மூன்றும் தேற்றம் : ஒரு சார்பின் மூலத் தொகை (primitive) க்கும், வரையறுத்த தொகை (definite integral) க்கும் உள்ள தொடர்பை விளக்குகிறது. $f(x)$ தொடர்ச்சியான சார்பு எனின், அதன் மூலத்தொகை $\phi(x)$-க்கும், வரையறுத்த தொகை $F(x)$-க்கும் உள்ள வித்தியாசம் ஒரு மாறிலிதான்.

இதனால் மூலத் தொகையின் மதிப்பிலிருந்து, வரையறுத்த தொகையின் மதிப்பைக் கணக்கிடலாம். குறிப்பாக,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \phi(b) - \phi(a) \text{ என்பதை அறிவோம்.}$$

இந்த அத்தியாயத்தின் தொடக்கத்தில் குறிப்பிட்டபடி, ஒரு சார்பின் வரையறுத் தொகை (மூலத் தொகை) காண்பதும், வரையறைத் தொகை காண்பதும் முற்றிலும் வேறுபட்ட வழி முறைகள். மூலத்தொகை உடைய எல்லாச் சார்புகளையும் தொகைப்படுத்த முடியாது. அவ்வாறே, தொகைப்படுத்தக் கூடிய எல்லாச் சார்புகளுக்கும் மூலத்தொகை கிடையாது.

எடுத்துக் காட்டாக,

$$x \neq 0 \text{ என்றால், } f(x) = 0$$

$$f(0) = 1 \text{ என்க.}$$

$x = 0$ என்ற ஒரே புள்ளியில் மட்டும், இச் சார்பு தொடர்ச்சி யற்றது. எனவே, எந்த இடைவெளியிலும் இதனைத் தொகைப் படுத்தலாம். இதன் வரையறுத்த தொகை $= 0$ ஆகும். ஆனால் இச்சார்புக்கு வரையருத் தொகை கிடையாது. அதாவது $f(x)$ ஐ வகைக்கெழுவாகக் கொண்ட சார்பு கிடையாது.

இனி,

$$x \neq 0 \text{ என்றால் } f(x) = x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x^2}$$

$$f(0) = 0 \text{ என்க.}$$

$(-1, 1)$ என்ற இடைவெளியில்

இச் சார்பின் மூலத்தொகை $\frac{1}{2} x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ ஆனால், $x = 0$ என்ற புள்ளியில் இச் சார்புக்கு வரம்பில்லாததால், $(-1, 1)$-ல் $f(x)$ ஐத் தொகைப்படுத்த முடியாது.

$$\text{i.e.,} \quad \int_{-1}^{1} f(x)\, dx \text{ காண இயலாது.}$$

**மாறி மாற்றம்** (change of variable)

சில சார்புகளில் அவற்றின் மாறியைத் தக்கபடி மாற்றுவதால் எளிதாகத் தொகைப்படுத்த முடியும் என்பதை அறிவோம்.

$\int_a^b f(x)\,dx$-ல், $x = \phi(t)$ என்ற சமன்பாடு மூலம் மாறியை மாற்றுவதற்குத் தேவையான நிபந்தனைகளைக் கீழ்க் கண்ட தேற்றம் தருகிறது.

**தேற்றம் :** $(a \leqslant x \leqslant b)$-ல், வரம்புடைய தொகைப்படுத்தத் தக்க சார்பு $f(x)$ என்க.

$a = \phi(\alpha)$, $b = \phi(\beta)$ என்றால், $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$-ல் $x = \phi(t)$ ஒற்றை மதிப்புடையதாகவும் (single valued), ஓரியல்பாகவும், வகைப்படத்தக்கதாகவும்; சார்புகள் $f\{\phi(t)\}$, $\phi'(t)$ இரண்டும் தொகைப்படத் தக்கனவாகவும் இருப்பின்,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\{\phi(t)\}\,\phi'(t)\,dt$$

$\{\alpha, \beta\}$ ஐ $\{\alpha, t_1, t_2, \ldots \ldots t_{n-1}, \beta\}$ ஆகிய புள்ளிக் கணத்தால், சிறு இடைவெளிகளாகப் பிரித்திடுக. இவைகளுக் கொப்ப x-ன் மதிப்புகள் $\{a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b\}$ என்க.

$$\therefore \quad x_r = \phi(t_r). \quad r = 1, 2, \ldots, n$$

$[\alpha, \beta]$-ல் $\phi(t)$ ஐ வகைப்படுத்தலாம்.

$$\therefore \quad x_r - x_{r-1} = \phi(t_r) - \phi(t_{r-1})$$
$$= (t_r - t_{r-1})\,\phi'(\eta_r)$$

இங்கு $< t_{r-1} < \eta_r < t_r$

$(x_{r-1}, x_r)$-ல் உள்ள ஒரு புள்ளி $\xi_r = \phi(\eta_r)$ என்க.

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \underset{\substack{n \to \infty \\ |x_r - x_{r-1}| \to 0}}{Lt} \sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)(x_r - x_{r-1})$$

$$= Lt \Sigma f\{\phi(\eta_r)\}\,(t_r - t_{r-1})\,\phi'(\eta_r)$$

$$= Lt \Sigma f\{\phi(\eta_r)\}\,\phi'(\eta_r).\,(t_r - t_{r-1})$$

நீளங்கள் $| x_r - x_{r-1} |$ பூச்சியத்தை அணுகும்போது, $| t_r - t_{r-1} |$-ம் பூச்சியத்தை அணுகும். $f \{ \phi (t) \}$, $\phi' (t)$ என்ற இரண்டையும் தொகைப்படுத்த முடியுமாதலால், அவைகளின் பெருக்குத் தொகை $f \{ \phi (t) \} . \phi' (t)$ ஐயும் தொகைப்படுத்தலாம்.

$$\therefore \quad \underset{\substack{n \to \alpha \\ | t_r - t_{r-1} | \to 0}}{Lt} \sum_{r=1}^{n} f(\phi)(\eta_r)\, \phi' (\eta_r) (t_r - t_{r-1})$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f \{ \phi (t) \} \phi' (t)\, dt.$$

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f \{ \phi (t) \} \phi' (t)\, dt.$$

குறிப்பு 1 : $f (x)$-ம், $\phi (t)$-ம் தொடர்ச்சியான சார்புகளாயின் $\phi' (t)$, $f \{\phi (t)\}$ என்ற இரண்டையும் தொகைப்படுத்தலாம் என்பது கூறுமலே விளங்கும்.

குறிப்பு 2 : நிபந்தனைகளில் $\phi (t)$ வகைப்படத் தக்கதாகவும் $\phi' (t)$ தொகைப்படத் தக்கதாகவும் இருக்க வேண்டுமென கூறப்பட்டுள்ளது. இதிலிருந்து, ஒரு சார்பை வகைப்படுத்த முடிந்தால் அதன் வகைக் கெழுவைத் தொகைப்படுத்த முடியும் என்று கூற இயலாது என்பது விளங்கும்.

எடுத்துக் காட்டாக,

$$x \neq 0 \text{ என்ருல்,} \quad f(x) = \frac{x^2}{2} \sin \frac{1}{x^2}$$

$$f(0) = 0 \text{ என்க.}$$

$$x \neq 0 \text{ என்ருல்,} \quad f'(x) = x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x^2}$$

$$f'(0) = 0 \text{ என்க.}$$

$(-1, 1)$-ல் $f(x)$ ஐ வகைப்படுத்த முடியும். அதன் வகைக் கெழு $f' (x)$.

ஆனுல், $x = 0$-ல் $f' (x)$ தொடர்ச்சியற்றதால் $f' (x)$ ஐ $(-1, 1)$-ல் தொகைப்படுத்த முடியாது.

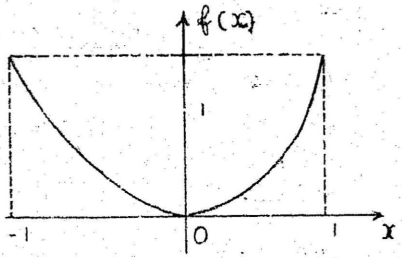
எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$I = \int_{-1}^{1} dx \quad \text{என்க.}$$

$$\therefore \quad I = [\, x \,]_{-1}^{1} = 2$$

இத் தொகையில் $x = t^{\frac{3}{2}}$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$I = \int_{1}^{1} \frac{3}{2}\, t^{\frac{1}{2}}\, dt = 0$$




படம் 6.

என்ற தவறான விடை கிடைக்கிறது. காரணம், இடைவெளி $(-1,\ 1)$-ல், $x = t^{\frac{3}{2}}$ ஓரியல்புடன் இல்லை; $(-1,\ 0)$-ல் இறங்கும் சார்பாகவும், $(0,\ 1)$-ல் ஏறும் சார்பாகவும் உள்ளது. ஆயினும், $(-1,\ 1)$ ஐ, $(-1, 0)$, $(0,\ 1)$ என இரு சிறு இடைவெளிகளாகப் பிரித்து,

$(-1,\ 0)$-ல் $x = -\, t^{\frac{3}{2}}$ என்றும்,

$0,)\ 1)$-ல் $x = t^{\frac{3}{2}}$ என்றும் பிரதியிட்டால்,

$$I = \int_{-1}^{0} dx + \int_{0}^{1} dx$$

$$= -\int_{1}^{0} \frac{3}{2}\, t^{\frac{1}{2}}\, dt + \int_{0}^{1} \frac{3}{2}\, t^{\frac{1}{2}}\, dt$$

$$= 3\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}\, dt = 3\left(\frac{2}{3}\, t^{\frac{3}{2}}\right)_0^1$$

$= 2$ என்ற சரியான விடை கிடைக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + x^2} \text{ என்க.}$$

$$\therefore \quad I = \Big[\tan^{-1} x\Big]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$$

இத் தொகையில் $x = 1/t$ எனப் பிரதியிட்டால், $t = 0$-ல் $x$-க்கு முடிவுள்ள (finite) மதிப்பில்லை. அதாவது $t = 0$-ல் சார்பு $x = 1/t$ தொடர்ச்சியற்றது. இதனைப் பொருட்படுத்தாமல் பிரதியிட்டால்,

$$I = -\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1 + t^2} = -\frac{\pi}{2}$$

என்ற தவறான விடை கிடைக்கும்.

## பயிற்சி

1. $x$-ன் விகிதமுறு மதிப்புகளுக்கு $f(x) = x^2$

 ,, விகிதமுரு ,, ,, ,, $= x^3$ என்றால்,

 $(0, 2)$-ல் $f(x)$-ன் ரீமன் தொகைகளைக் கணக்கிடுக.

2. $[a, b]$-ல், $f(x)$ ஒரு மிகை சார்பாகவும், தொகைப்படத் தக்கதாகவும், இடைவெளியிலுள்ள $c$ என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியான சார்பாகவும், $f(c) > 0$ எனவும் இருப்பின்,

$$\int_a^b f(x)\, dx > 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

3. $\left(\dfrac{1}{2^{n+1}} < x \leq \dfrac{1}{2^n}\right)$-ல் $f(x) = \dfrac{1}{2^n}$ $\quad n = 0, 1, 2, 3$

$$f(0) = 0$$

என்றால், $(0, 1)$-ல் $f(x)$ஐத் தொகைப்படுத்தலாம் என நிறுவுக.

4. $a > 1$ என்றால், $r = 1, 2, 3 \ldots\ldots$ ஆகிய மதிப்புகளுக்கு $\left(\frac{1}{a^r} < x < \frac{1}{a^{r-1}}\right)$-ல், $f(x) = \frac{1}{a^{r-1}}$ என்றால்,

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{a}{a+1}$$ என நிறுவுக.

5. $r = 1, 2, 3, \ldots \ldots \ldots \ldots$ ஆகிய மதிப்புகளுக்கு $\left(\frac{1}{r+1} < x < \frac{1}{r}\right)$ -ல் $f(x) = 2rx$ என்றால் $(0, 1)$-ல் $f(x)$ ஐத் தொகைப்படுத்தலாம் எனவும்,

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{\pi^2}{6}$$ எனவும் நிறுவுக.

6. முதல் இடைமதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க் கண்ட சமமின்மைகளை நிறுவுக.

(i) $$\frac{\pi}{6} \leqslant \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \leqslant \frac{\pi}{6} \quad \frac{1}{\sqrt{1-k^2/4}}$$

(ii) $$0{\cdot}573 < \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-3x+x^3}} < 0{\cdot}595$$

(iii) $$x e^{-x^2} < \int_0^x e^{-t^2}\, dt < \tan^{-1} x$$ ($x > 0$ என்க.)

# 3. தகாத் தொகைகள்

## (Improper Integrals)

ரீமன் தொகை $\int_a^b f(x)\,dx$-ன் வரையறையில் $[a, b]$ ஐ முடிவுள்ள (finite) இடைவெளியெனவும், $f(x)$ ஐ வரம்புள்ள (bounded) சார்பு எனவும் கொண்டோம். இந் நிபந்தனைகள் பூர்த்தி யாகாவிடில் ரீமன் தொகைக்குப் பொருளில்லை. எனினும், கணித மேதை கோஷி (Cauchy), ரீமன் தொகையின் வரையறையைக் கீழ்க்கண்ட இருவகைகளுக்கு விரிவுபடுத்தியுள்ளார்.

(i) இடைவெளி முடிவில்லாதது (infiinite); ஆனால் தொகை சார்பு வரம்புள்ளது.

(ii) இடைவெளி முடிவுள்ளது; ஆனால் தொகை சார்பு வரம்பற்றது. அதாவது சில புள்ளிகளில் தொகை சார்பு கந்தழியால் தொடர்ச்சி அற்றது.

இத்தகைய தொகைகளை, தகாத்தொகைகள் என அழைக்கிறோம். இவ்வாறு, தகாத்தொகைகள் இருவகைப்படும். மேலே குறிப்பிட்ட வரிசையில் அவைகளை முறையே **முதல்வகைத் தகாத் தொகைகள், இரண்டாம் வகைத் தகாத் தொகைகள்** என அழைக்கிறோம்.

**மாதிரிகள் :**

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}, \quad \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)(2-x)}$$

**முதல் வகை தகாத் தொகைகள்**

இடைவெளி $[a, X]$-ல் வரம்புள்ள தொகைப்படுத்தத் தக்க சார்பு $f(x)$ என்க.

$\underset{X \to \infty}{Lt} \int_a^X f(x)\,dx$ என்ற எல்லை மதிப்பு இருக்குமானல்,

அம் மதிப்பை $\int_a^\infty f(x)\,dx$ என வரையறுக்கிறோம்.

$$\therefore \int_a^\infty f(x)\,dx = \underset{X \to \infty}{Lt} \int_a^X f(x)\,dx.$$

தகாத் தொகை $\int_a^\infty f(x)\,dx$, மேற்கண்ட எல்லை மதிப்பிற்குக் குவிகிறது (converges) என்கிறோம்.

$\underset{X \to \infty}{Lt} \int_a^X f(x)\,dx = \pm \infty$ என்றால்,

தகாத் தொகை $\int_a^\infty f(x)\,dx$ விரிகிறது (diverges) என்கிறோம்.

$X$ கந்தழியை அணுகும்போது, $\int_a^X f(x)\,dx$ ஒரு திட்டவட்டமான மதிப்பை அடையாவிடில், $\int_a^\infty f(x)\,dx$ அலைவுறுகிறது (oscillates) என்கிறோம்.

இவ்வாறே இடைவெளி $[X, b]$-ல் வரம்புள்ள தொகைப்படுத்தத் தக்க சார்பு $f(x)$ என்றால், $\underset{X\to\infty}{Lt}\int_{X}^{b} f(x)\,dx$-ன் எல்லை மதிப்பை $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ என வரையறுக்கிறோம்.

தகாத் தொகை $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ அவ்வெல்லை மதிப்பிற்குக் குவிகிறது என்கிறோம்.

இத் தகாத் தொகையின் விரிவும், அலைவும், $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$-க்குப் போன்றே வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன.

ஏதேனும் ஓர் எண் $c$ என்றால், $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$, $\int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$ ஆகிய இரு தொகைகளும் குவியுமாயின்,

தகாத் தொகை $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ குவிகிறது என்கிறோம்.

மேலும் $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= \underset{X\to\infty}{Lt}\int_{-X}^{c} f(x)\,dx + \underset{X'\to\infty}{Lt}\int_{c}^{X'} f(x)\,dx$$

சில வேளைகளில்,

$$\underset{X\to\infty}{Lt}\int_{-X}^{c} f(x)\,dx,\quad \underset{X'\to\infty}{Lt}\int_{c}^{X'} f(x)\,dx$$

ஆகிய எல்லை மதிப்புகளைத் தனித்தனியே காண இயலாது. ஆனாலும், $\underset{X \to \infty}{Lt} \int_{-X}^{X} f(x)\, dx$-ன் எல்லை மதிப்பைக் காண முடியும். அம் மதிப்பை $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$-ன் தலையாய மதிப்பு (principal value) எனக் கூறுகிறோம். அதனை $P \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ என எழுதுகிறோம்.

$$\therefore \quad P \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \underset{X \to \infty}{Lt} \int_{-X}^{X} f(x)\, dx$$

ஆனால், தகாத் தொகை $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ குவிய வேண்டுமாயின், $\int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx$, $\int_{c}^{\infty} f(x)\, dx$ ஆகிய இரு தொகைகளும் தனித் தனியே குவியவேண்டும். $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$-ன் தலையாய மதிப்பு மட்டும் இருந்தால் போதாது.

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ குவியும்போது, அதன் பொது மதிப்பும், தலையாய மதிப்பும் சமமாகும்.

**எடுத்துக்காட்டுகள்**

$$\text{(i)} \quad \int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx = \underset{X \to \infty}{Lt} \int_{0}^{x} e^{-x}\, dx$$

$$= \underset{X \to \infty}{Lt} [1 - e^{-x}]$$

$$= 1.$$

$$\therefore \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx \text{ குவிகிறது.}$$

(ii) $$\int_1^{\infty} \log x\, dx = \underset{X \to \infty}{Lt} \Big[ x \log x - x \Big]_1^X$$

$$= \underset{X \to \infty}{Lt} [X \log X - X + 1]$$

$$= \underset{X \to \infty}{Lt} [X \log X/e + 1]$$

$$= \infty$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \log x\, dx \text{ விரிகிறது.}$$

(iii) $$\int_a^{\infty} \sin x\, dx = \underset{X \to \infty}{Lt} [\cos a - \cos X]$$

$X$, கந்தழியை அணுகும்போது, $\cos X$, $-1, +1$ ஆகிய இரு மதிப்புகளுக்கிடையில் அலைவுறுகிறது.

$\therefore \int_a^{\infty} \sin x\, dx$ என்ற தகாத் தொகை, $\cos a-1$, $\cos a+1$ ஆகிய மதிப்புகளுக்கிடையில் அலைவுறுகிறது.

இவ்வாறே $\int_a^{\infty} x \sin x\, dx$ என்ற தொகை $-\infty$, $+\infty$ ஆகிய வற்றிற்கிடையே அலைவுறுகிறது.

(iv) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, dx}{x^2 + a^2}$ என்ற தொகையில் $a > 0$ என்க.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{x^2+a^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2+a^2}$$

$$= \underset{X \to -\infty}{Lt} \int_{X}^{0} \frac{x\,dx}{x^2+a^2} + \underset{X' \to \infty}{Lt} \int_{0}^{X'} \frac{x\,dx}{x^2+a^2}$$

$$= \underset{X \to -\infty}{Lt} \left[\frac{1}{2}\log(x^2+a^2)\right]_X^0$$

$$+ \underset{X' \to \infty}{Lt} \left[\frac{1}{2}\log(x^2+a^2)\right]_0^{X'}$$

$$= \underset{X \to -\infty}{Lt} \left[\frac{1}{2}\log\frac{a^2}{X^2+a^2}\right]$$

$$+ \underset{X' \to \infty}{Lt} \left[\frac{1}{2}\log\frac{X'^2+a^2}{a^2}\right]$$

$$= -\infty + \infty$$ (தேராதது) (indeterminate).

இத் தகாத்தொகைக்குப் பொது மதிப்பு கிடையாது.

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2+a^2}$$ குவியவில்லை.

ஆயினும்

$$\underset{X \to \infty}{Lt} \int_{-X}^{X} \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \underset{X \to \infty}{Lt} \left[\frac{1}{2}\log\frac{(X^2+a^2)}{(X^2+a^2)}\right]$$

$$= 0.$$

i.e., $$P\int_{-X}^{X} \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = 0.$$

**குவிதலுக்கான கோஷியின் பொது விதி** (Cauchy's general principle of convergence).

$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ என்ற தகாத்தொகை $I$ எனும் மதிப்பிற்குக்

குவியுமானல், கொடுக்கப்பட்ட சிறு மிகை எண் $\in$-க்குத் தக்க, $m$ என்ற ஒரு மிகை எண்ணை, $m$ ஐ விட உயர்ந்த அல்லது சமமான $X$-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் (i.e., $X \geqslant m$)

$$\left| I - \int_a^{x} f(x)\,dx \right| < \in$$

என அமையுமாறு காணலாம்.

எனவே, $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ என்ற தகாத் தொகை, குவிவதற்குத்

**தேவையான & போதுமான** (necessarry and sufficient) **நிபந்தனை யாவது :**

கொடுக்கப்பட்ட மிகை எண் $\in$-க்குத் தக்க, $m$ என்ற ஒரு மிகை எண்ணை, $m$ ஐ விட உயர்ந்த அல்லது சமமான $X'$, $X''$-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் (i.e., $X'' > X' \geqslant m$),

$$\left| \int_{X'}^{X''} f(x)\,dx \right| < \in$$

என அமையுமாறு காணலாம்.

இந் நிபந்தனை தேவையானது என்பதை முதலில் நிறுவுவோம்.

$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ என்ற தகாத் தொகை, $I$ எனும் மதிப்பிற்குக் குவிகிறது என்க.

எனவே, $\in$-க்குத் தக்க, ஒரு மிகை எண் $m$ ஐ $X \geqslant m$ என்றுள்ள $X$-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும்,

$$\left| I - \int_a^{X} f(x)\,dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

என அமையுமாறு காணலாம்.

எனவே,

$$\int_{X'}^{X''} f(x)\,dx = \int_a^{X''} f(x)\,dx - \int_a^{X'} f(x)\,dx$$

$$= \left\{ \int_a^{X''} f(x)\,dx - I \right\} + \left\{ I - \int_a^{X''} f(x)\,dx \right\}$$

$$\therefore \left| \int_{X'}^{X''} f(x)\,dx \right| \leq \left| \int_a^{X''} f(x)\,dx - I \right| + \left| I - \int_a^{X'} f(x)\,dx \right|$$

$\therefore X'' > X' \geq m$ என்றால்,

$$\left| \int_{X'}^{X''} f(x)\,dx \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

$$< \epsilon.$$

இனி, நிபந்தனை போதுமானது என்பதை நிறுவுவோம்.

$X'' > X' > m$ என்றால்,

$\left| \int_{X'}^{X''} f(x)\,dx \right| < \epsilon$ எனக் கொள்வோம்.

i.e., $$\left| \int_a^{X''} f(x)\,dx - \int_a^{X'} f(x)\,dx \right| < \epsilon$$

எனவே, $X'$ ஐ நிலையான புள்ளியாகக் கொண்டால்,

$$\int_a^{X'} f(x)\,dx - \epsilon < \int_a^{X''} f(x)\,dx < \int_a^{X'} f(x)\,dx + \epsilon$$

எனக் கிடைக்கிறது.

$X$ ஐ விட உயர்ந்த, $X''$-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் இச் சமமின்மை பொருந்தும்.

$\therefore$ $X''$-ன் மதிப்பு கந்தழியை அணுகினால்,

$\underset{X''\to\infty}{Lt} \int_a^{X''} f(x)\,dx$-ன் மதிப்பும் ஒரு முடிவுள்ள எண்ணாக அமையும்.

307154
515.43
SEL;2

i.e., $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ குவியும்.

**துணை முடிவு :** $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_a^{X} f(x)\,dx + \int_X^{\infty} f(x)\,dx$

எனவே, தகாத்தொகை $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ குவியும்போது, $X \geq m$ என்றால்,

$$\left| \int_a^{\infty} f(x)\,dx - \int_a^{X} f(x)\,dx \right| < \epsilon.$$

$$\therefore \left| \int_X^{\infty} f(x)\,dx \right| < \epsilon.$$

மாறாக, $X \geqslant m$ என்றமைந்த $X$-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும்

$$\left| \int_X^\infty f(x)\,dx \right| < \epsilon$$ என்றால், தகாத்தொகை $\int_a^\infty f(x)\,dx$ குவியும்.

அறவே குவிதல் (Absolute convergence)

தகாத் தொகை $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ குவியுமானால்,

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ அறவே குவிகிறது என்போம்.

$$\left| \int_{X'}^{X''} f(x)\,dx \right| \leqslant \int_{X'}^{X''} |f(x)|\,dx$$ ஆதலால்,

$\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ குவியுமானால், $\int_a^\infty f(x)\,dx$-ம் குவியும்.

ஆனால், இதற்கு மாறாக, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ குவியும் போதெல்லாம்

$\int_a^\infty |f(x)|\,dx$-ம் குவியும் என்று கூற இயலாது.

உதாரணமாக, $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ என்ற தகாத்தொகை குவிகிறது.

இதன் மதிப்பு $= \pi/2$ (இது, எவ்வாறு குவிகிறது என்பதைப் பின்னர் நிரூபிப்போம்.)

ஆனால், $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ விரிகிறது.

நிருபணம் : $(0, n\pi)$ என்ற இடைவெளியை எடுத்துக் கொள்க. $n$, மிகை முழு எண் என்க.

$$\therefore \int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

$$+ \dots \dots + \int_{\overline{r-1}\pi}^{r\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx + \dots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \int_{(r-1)\pi}^{r\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

$y = x - (r-1)\pi$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$\int_{\overline{r-1}\pi}^{r\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{|\sin y|}{(r-1)\pi + y}\,dy$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin y\,dy}{r\pi - (\pi - y)} \quad (\because\ (0, \pi)\text{-ல் } \sin y > 0)$$

$$> \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{r\pi}\,dy \qquad (\because\ (\pi - y) > 0)$$

$$> \frac{1}{r\pi} \int_0^{\pi} \sin y\,dy.$$

$$> \frac{2}{r\pi}.$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} \int_{(r-1)\pi}^{r\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$$

$$> \frac{2}{\pi}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right]$$

$$\text{i.e.,} \int_{0}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx > \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{n}\frac{1}{n}$$

$\sum \frac{1}{n}$ ஒரு விரி தொடர் ஆதலால்,

$$\underset{n\to\infty}{Lt} \int_{0}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \infty$$

i.e., $\int_{0}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$ கந்தழிக்கு விரிகிறது.

**குவிதலுக்கான சோதனைகள்** (Tests for convergence)

**தேற்றம் 1:** $(a, X)$-ல் $f(x)$ ஒரு மிகை சார்பாயின், $\int_{a}^{X} f(x)\, dx$ என்ற தொகை, $X$-ல், ஓர் ஏறும் சார்பாக இருக்கும். எனவே, இத் தொகை குவியலாம் அல்லது விரியலாம். (அலைவுற முடியாது).

$X > a$ என்றுள்ள $X$-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும், $\int_{a}^{X} f(x)\, dx$-க்கு, ஒரு மேல் வரம்பு இருப்பின்,

i.e., $\int_{a}^{X} f(x)\, dx < k$ என்றால், $\int_{a}^{\infty} f(x)\, dx$ குவியும்.

$\int_a^X f(x)\,dx$-க்கு மேல் வரம்பு இல்லாவிடில் $\int_a^\infty f(x)\,dx$ கந்தழிக்கு விரியும்.

**தேற்றம் 2 : ஒப்பீட்டுச் சோதனை** (Comparision test)

$(a, X)$-ல் வரம்புள்ள, தொகைப்படுத்தத்தக்க இரு மிகை சார்புகள், $f(x)$, $g(x)$ என்க.

**வகை 1 :** $(a, X)$-ல், $g(x) \leqslant f(x)$ என்றால்,

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ குவியுமானால்,}$$

$$\int_a^\infty g(x)\,dx\text{-ம் குவியும்.}$$

மேலும்,

$$\int_a^\infty g(x)\,dx \leqslant \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ ஆகும்.}$$

$\int_{X'}^{X''} g(x)\,dx \leqslant \int_{X'}^{X''} f(x)\,dx$ என்ற சமமின்மை மூலம், இத் தேற்றத்தை நிறுவலாம்.

**வகை 2 :** $(a, X)$-ல் $g(x) \geqslant f(x)$ என்றால்,

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ கந்தழிக்கு விரியுமானால்,}$$

$$\int_a^\infty g(x)\,dx\text{-ம் கந்தழிக்கு விரியும்.}$$

$$\int_a^X g(x)\,dx \geqslant \int_a^X f(x)\,dx$$

என்ற சமமின்மை மூலம், இத் தேற்றத்தை நிறுவலாம்.

நடைமுறைவிதி

தேற்றம் (2) ஐக் கீழ்க்கண்ட முறையிலும் எழுதலாம்.

வகை 1 : $\underset{x \to \infty}{Lt} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ ஒரு முடிவுள்ள எண் என்ருல்,

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ உடன், $\int_a^\infty g(x)\,dx$-ம் குவியும்.

வகை 2 : $\underset{x \to \infty}{Lt} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ = ஒரு முடிவுள்ள, பூச்சியத்திற்குச் சமமில்லாத எண், என்ருல் $\int_a^\infty f(x)\,dx$ உடன், $\int_a^\infty g(x)\,dx$–ம் விரியும்.

$\underset{x \to \infty}{Lt} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$ என்ருல், இச் சோதனையைப் பயன் படுத்த முடியாது.

குறிப்பு: ஒரு தகாத்தொகை, குவிகிறதா, விரிகிறதா என்பதை ஆராய, அதனை நமக்குத் தெரிந்த மற்ருெரு தகாத் தொகையுடன் ஒப்பிடுவதே ஒப்பீட்டுச் சோதனையாகும். கீழ்க் காணும் தகாத்தொகையை, தெரிந்து வைப்பது, பயனுள்ளதாகும்.

தகாத் தொகை $\int_a^\infty \dfrac{dx}{x^\mu}$ -ல் $a > 0$ என்க.

$\mu > 1$ என்ருல் இத் தொகை குவியும்.

$\mu \leqslant 1$ என்ருல் இத் தொகை கந்தழிக்கு விரியும்

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\mu} = \underset{X \to \infty}{Lt} \int_a^X x^{-\mu}\, dx.$$

$\therefore \quad \mu \neq 1$ என்றால்,

$$\underset{X \to \infty}{Lt} \int_a^X x^{-\mu}\, dx = \frac{1}{1-\mu}\left\{X^{1-\mu} - a^{1-\mu}\right\}$$

மேலும், $\mu < 1$ என்றால் ,, $= \infty$

$\mu > 1$ என்றால் ,, $= -\dfrac{a^{1-\mu}}{1-\mu}$.

$\mu = 1$ என்றால்,

$$\underset{X \to \infty}{Lt} \int_a^X \frac{dx}{x} = \underset{X \to \infty}{Lt} [\log X - \log a]$$

$$= \infty.$$

$\therefore \quad \mu > 1$ என்றால் மட்டுமே, $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^\mu}$ குவிகிறது.

குறிப்பு : இப்போது, $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^\mu}$ நமக்குத் தெரிந்த தகாத் தொகையாதலால், இதன் துணையுடன், ஒப்பீட்டுச் சோதனையைப் புதிய வடிவில் மாற்றி எழுதலாம்.

**குவிதலுக்கான சோதனை**

$a > 0$ என்க. $(a, X)$-ல் வரம்புள்ள தொகைப்படுத்தத் தக்க சார்பு $f(x)$ என்றால், $\mu > 1$ என்றுள்ள $\mu$-ன் எந்த மதிப்பிற்கும்,

$\left\{x^\mu f(x)\right\}$ வரம்புள்ள சார்பாயின்,

$\displaystyle\int_a^\infty f(x)\, dx$ அறவே குவியும்.

$\left\{x^{\mu} f(x)\right\}$ வரம்புள்ள சார்பாதலின்,

$(a, X)$-ல் $\left|x^{\mu} f(x)\right| < K$ என அமையும்.

$$\therefore \quad |f(x)| < \frac{K}{x^{\mu}} \qquad (\because \quad x > a > 0)$$

$$\therefore \int_a^{\infty} |f(x)|\, dx < K \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\mu}}$$

$\mu > 1$ ஆதலால், $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\mu}}$ குவிகிறது.

$\therefore \displaystyle\int_a^{\infty} |f(x)|\, dx$-ம் குவிகிறது.

i.e., $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ அறவே குவிகிறது.

**நடைமுறை விதி :**

$(a, X)$-ல் $\displaystyle\underset{x \to \infty}{Lt} \left\{x^{\mu} f(x)\right\}$ = ஒரு முடிவுள்ள எண்ணானல், $\left\{x^{\mu} f(x)\right\}$ வரம்புள்ள சார்பாக அமையும்.

$\therefore$ $\mu > 1$ என்றால் $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ அறவே குவியும்.

**விரிதலுக்கான சோதனை**

$a > 0$ என்க. $(a, X)$-ல் வரம்புள்ள, தொகைப்படத்தக்க சார்பு $f(x)$ என்க. $\mu \leqslant 1$ என்றுள்ள $\mu$-ன் எந்த மதிப்பிற்கும்,

$\left\{ x^{\mu} f(x) \right\}$-ன் கீழ் வரம்பு ஒரு மிகை எண்ணானல், $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ என்ற தகாத் தொகை $+\infty$-க்கு விரியும். $\left\{ x^{\mu} f(x) \right\}$-ன் மேல் வரம்பு ஒரு குறை எண்ணானல், $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$, $-\infty$-க்கு விரியும்.

$\left\{ x^{\mu} f(x) \right\}$-ன் கீழ் வரம்பு $(L)$, ஒரு மிகை எண் என்க.

$\therefore$ $(a, X)$-ல் $x^{\mu} f(x) > L > 0$

$$f(x) > \frac{L}{x^{\mu}} > 0$$

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx > L \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\mu}}$$

$\mu < 1$ ஆதலால், $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\mu}}$, $+\infty$-க்கு விரிகிறது.

$\therefore$ $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$-ம் $+\infty$-க்கு விரிகிறது.

$\left\{ x^{\mu} f(x) \right\}$-ன் மேல் வரம்பு, ஒரு குறை எண்ணானல், $\left\{ -x^{\mu} f(x) \right\}$ ன் கீழ் வரம்பு ஒரு மிகை எண்ணாகும்.

$\therefore$ $\int_a^{\infty} -f(x)\,dx$, $+\infty$-க்கு விரியும்.

$$\therefore \int_a^{\infty} f(x)\,dx, \; -\infty\text{-க்கு விரியும்.}$$

நடைமுறை விதி :

$(a, X)$-ல் $\underset{x \to \infty}{Lt}\; x^{\mu} f(x) =$ ஒரு முடிவுள்ள, பூச்சியத்திற்கு சமமில்லாத எண் $(l)$ என்க.

$l > 0$ என்ருல், $\left\{x^{\mu} f(x)\right\}$-ன் கீழ் வரம்பு ஒரு மிகை எண்ணுக அமையும்.

$l < 0$ என்ருல், $\left\{x^{\mu} f(x)\right\}$-ன் மேல் வரம்பு ஒரு குறை எண்ணுக அமையும்.

எனவே $\mu \leqslant 1$ மதிப்பிற்கு,

$$l > 0 \text{ என்ருல், } \int_a^{\infty} f(x)\,dx, \; +\infty\text{-க்கு விரியும்.}$$

$$l < 0 \text{ என்ருல், } \int_a^{\infty} f(x)\,dx, \; -\infty\text{-க்கு விரியும்.}$$

குறிப்பு : $l = 0$ என்ருல், இச் சோதனையைப் பயன்படுத்த முடியாது.

எடுத்துக்காட்டுகள்

(1) $a > 0$ என்ருல், $\int_a^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}$ குவிகிறது.

$x \geqslant a > 0$ ஆதலால்,

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$$

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2} \text{ குவிகிறது.}$$

$$\therefore \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx\text{-ம் குவிகிறது.}$$

**துணை முடிவு :** $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$ குவிகிறது.

**நிரூபணம் :**

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx + \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx.$$

$$\underset{x \to 0}{Lt} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1 \text{ ஆதலால்,}$$

$\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$ ஒரு தகு தொகை (proper integral).

எனவே அதன் மதிப்பு முடிவுள்ளது.

$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$ குவிகிறது. (இங்கு $a = 1 > 0$)

$$\therefore \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx\text{-ம் குவிகிறது.}$$

(2) $a > 0$ என்ருல் $\int_a^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx$ அறவே குவிகிறது.

$$\int_a^\infty |e^{-ax}\cos bx|\,dx \leqslant \int_a^\infty e^{-ax}\,dx.$$

$$\underset{X\to\infty}{Lt}\int_a^X e^{-ax}\,dx = \underset{X\to\infty}{Lt}\left[\frac{e^{-ax}}{-a}\right]_a^X$$

$$= \frac{e^{-a^2}}{-a} = \text{(முடிவுள்ள எண்)}$$

$\therefore \int_a^\infty e^{-ax}\,dx$ குவிகிறது.

$\therefore \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx$ அறவே குவிகிறது.

(3) $\beta > 0,\ \alpha > 0$ என்றால்

$\int_0^\infty \frac{x^\beta\,dx}{1+x^\alpha\sin^2 x}$ எப்போது குவியும் என ஆராய்க.

$$\int_0^\infty \frac{x^\beta\,dx}{1+x^\alpha\sin^2 x} = \underset{n\to\infty}{Lt}\int_0^{n\pi}\frac{x^\beta\,dx}{1+x^\alpha\sin^2 x}$$

$$\int_0^{n\pi}\frac{x^\beta\,dx}{1+x^\alpha\sin^2 x} = \sum_{r=0}^{n-1}\int_{r\pi}^{(r+1)\pi}\frac{x^\beta\,dx}{1+x^\alpha\sin^2 x}$$

இடைவெளி $(r\pi, \overline{r+1}\,\pi)$ -ல்

$$r\pi \leqslant x \leqslant (r+1)\pi$$

$$\therefore \quad \frac{(r\pi)^{\beta}}{1+\{(r+1)\pi\}^{\alpha}\sin^2 x} \leqslant \frac{x^{\beta}}{1+x^{\alpha}\sin^2 x}$$

$$\leqslant \frac{\{(r+1)\pi\}^{\beta}}{1+(r\pi)^{\alpha}\sin^2 x}$$

$$\therefore \int_{r\pi}^{(r+1)\pi} \frac{x^{\beta}\,dx}{1+x^{\alpha}\sin^2 x} < \int_{r\pi}^{(r+1)\pi} \frac{\{(r+1)\pi\}^{\beta}\,dx}{1+A\sin^2 x}.$$

$A = (r\pi)^{\alpha}$ என்க.

இப்போது, $$\int_{r\pi}^{(r+1)\pi} \frac{dx}{1+A\sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dy}{1+A\sin^2 y}$$

($y = x - r\pi$ எனக் கொண்டால்)

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{1+A\sin^2 y}.$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 y\,dy}{1+(A+1)\tan^2 y}.$$

$$= 2\int_0^{\infty} \frac{du}{1+(A+1)u^2} \qquad (u = \tan y)$$

$$= \frac{2}{(A+1)}\sqrt{A+1}.\ \Big[\tan^{-1} u\sqrt{A+1}\Big]_0^{\infty}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{A+1}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{(r\pi)^{\alpha}+1}}$$

இவ்வாறு,

$$\frac{(r\pi)^{\beta} . \pi}{\sqrt{\{(r+1)\pi\}^{\alpha}+1}} < \int_{r\pi}^{(r+1)\pi} \frac{x^{\beta}\, dx}{1+x^{\alpha}\sin^2 x}$$

$$< \frac{\{(r+1)\pi\}^{\beta} . \pi}{\sqrt{(r\pi)^{\alpha}+1}}$$

$$\sum \int_{r\pi}^{(r+1)\pi} \frac{x^{\beta}\, dx}{1+x^{\alpha}\sin^2 x}$$

என்ற தொடர்,

$\sum \frac{1}{r^{\alpha/2-\beta}}$ உடன் குவியும் அல்லது விரியும்.

$\frac{\alpha}{2} - \beta > 1$ என்றால், $\sum \frac{1}{r^{\alpha/2-\beta}}$ குவியும்.

எனவே, $\alpha > 2(\beta+1)$ என்றால்,

$\int_0^{\infty} \frac{x^{\beta}\, dx}{1+x^{\alpha}\sin^2 x}$ குவியும்.

$\alpha < 2(\beta+1)$ என்றால், இத்தொகை விரியும்,

குறிப்பாக,

$\int_0^{\infty} \frac{x\, dx}{1+x^6\sin^2 x}$ குவிகிறது.

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1 + x^4 \sin^2 x} \text{ விரிகிறது.}$$

(4) $m, n$ இரு மிகை முழு எண்களாயின்,

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1 + x^{2n}} \text{ எப்போது குவியும் என ஆராய்க.}$$

$$f(x) = \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}} \text{ என்க.}$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1 + x^{2n}} = \int_0^\infty f(x)\,dx$$

$$= \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx;$$

$a > 0$ எனக் கொள்க.

$$= I_1 + I_2 \text{ என்க.}$$

$I_1$ ஒரு தகு தொகை. எனவே அது குவிகிறது.

$$I_2\text{-ல்,} \quad \underset{x \to \infty}{Lt}\ x^{\mu} f(x) = \underset{x \to \infty}{Lt}\ \frac{x^{2m+\mu}}{1 + x^{2n}}$$

$\therefore$ $2m + \mu = 2n$ என எடுத்துக் கொண்டால்,

i.e., $\mu = 2(M - m)$ என்றால்,

$$\underset{x \to \infty}{Lt}\ x^{\mu} f(x) = 1.$$

$m, n$ என்ற இரண்டும் மிகை முழு எண்களாதலால்,

$n > m$ என்றால், $\mu > 1$ ஆகும்.

$n \leqslant m$ என்றால், $\mu < 1$ ஆகும்.

$\therefore$ $n > m$ என்றால் $I_2$ குவிகிறது.

$n \leqslant m$ என்றால் $I_2$ விரிகிறது.

i.e., $n > m$ என்ருல் $\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}}$ குவிகிறது.

$n \leqslant m$ என்ருல், இத் தொகை விரிகிறது.

**மேலும் சில சோதனைகள்**

**சோதனை 1 :** தகாத் தொகை $\int_a^\infty f(x)\,dx$ அறவே குவியுமாஞல், $(a, X)$-ல் வரம்புள்ள, தொகைப்படுத்தத்தக்க சார்பு $g(x)$ என்ருல், தகாத் தொகை $\int_a^\infty f(x) \cdot g(x)\,dx$ அறவே குவியும்.

$(a, X)$-ல் $g(x)$ வரம்புள்ள சார்பாதலின்,

$|g(x)| \leqslant k$ என அமையும்.

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ அறவே குவிதலால் $\in$-க்குத் தக்க ஒரு மிகை எண் $m$ ஐ, $X'' > X' \geqslant m$ என்றுள்ள $X'$ $X''$-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கு, $\int_{X'}^{X''} |f(x)|\,dx < \in$ எனக் காணலாம்.

$$\therefore \left| \int_{X'}^{X''} f(x) \cdot g(x)\,dx \right| \leqslant \int_{X'}^{X''} |f(x) \cdot g(x)|\,dx$$

$$\leqslant \int_{X'}^{X''} |f(x)| \cdot |g(x)|\,dx$$

$$\leqslant K \int_{X'}^{X''} |f(x)|\,dx$$

$$< K \in.$$

$$\therefore \int_a^\infty | f(x) \cdot g(x) | \, dx \text{ குவிகிறது.}$$

i.e., $\int_a^\infty f(x) \cdot g(x) \cdot dx$ அறவே குவிகிறது.

**ஆபெலின் சோதனை** (Abel's test)

$\int_a^\infty f(x)\, dx$ குவியுமானால், $(a, X)$-ல், வரம்புள்ள, தொகைப் படத்தக்க, ஓரியல்புள்ள சார்பு $g(x)$ என்றால், தகாத்தொகை $\int_a^\infty f(x) \cdot g(x) \cdot dx$ குவியும்.

**திரிசிலேயின் சோதனை** (Dirichlet's test)

$x \geqslant a$ என்றுள்ள $x$-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கு, $\int_a^x f(x)\, dx$ வரம்புள்ள சார்பாயின் $(a, X)$-ல் வரம்புள்ள ஓரியல்புள்ள சார்பு $g(x)$ என்றால், $\underset{x \to \infty}{Lt}\, g(x) = 0$ என அமையின், தகாத்தொகை $\int_a^\infty f(x) \cdot g(x)\, dx$ குவியும்.

இவ்விரு சோதனைகளையும், இரண்டாம் இடைமதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி நிறுவலாம்.

**எடுத்துக்காட்டுகள்**

(1) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ குவிகிறது.

$a > 0$ என்ருல்,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_a^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$= I_1 + I_2 \quad \text{என்க.}$$

$\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ என்பதால், $I_1$ ஒரு தகுதொகையாகும். எனவே அது குவிகிறது.

$I_2$-ல், $f(x) = \sin x$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$ எனக் கொள்க.

$x \geqslant a$ என்ருல், $g(x) = \dfrac{1}{x}$, வரம்புள்ள இறங்கும் சார்பாகும்.

$$\underset{x \to \infty}{Lt} \left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

$$\int_a^X \sin x\,dx = \cos a - \cos X$$

$$\therefore \quad \left| \int_a^X \sin x\,dx \right| \leqslant |\cos a| + |\cos X|$$

$$\leqslant 2$$

$\therefore$ $(a, X)$-ல், $\displaystyle\int_0^X \sin x\,dx$ வரம்புள்ள சார்பாகும்.

எனவே திரிசிலேயின் சோதனையின் படி,

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \text{ குவிகிறது.}$$

எனவே, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ குவிகிறது.

குறிப்பு : $k > 0$ என்றால், $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^k}\, dx$ குவிகிறது.

(2) $\int_1^\infty \sin x^p\, dx$ எப்போது குவிகிறது என்பதை ஆராய்க.

$$\int_1^\infty \sin x^p\, dx = \int_1^\infty \frac{1}{(p\, x^{p-1})} (p\, x^{p-1} \sin x^p)\, dx.$$

$p > 1$ என்றால், $x \geqslant 1$ என்றுள்ள மதிப்புகளுக்கு $\left\{\frac{1}{p\, x^{p-1}}\right\}$ வரம்புள்ள ஓரியல்புச் சார்பாகும்.

மேலும், $\underset{x \to \infty}{Lt} \left\{\frac{1}{p\, x^{p-1}}\right\} = 0 \qquad (\because\ p > 1)$

$$\int_1^X p\, x^{p+1} \sin x^p\, dx = \int_1^{X^p} \sin u \,.\, du$$

($u = X^p$ எனக் கொள்க).

$$\therefore \left| \int_1^X p\, x^{p-1} \sin x^p\, dx \right| \leqslant |\cos 1| - |\cos X^p|$$
$$< 2.$$

எனவே, திரிசிலேயின் தேற்றத்தின்படி, $p > 1$ என்றால்,

$\int_1^\infty \sin x^p\, dx$ குவிகிறது என்பதை அறியலாம்.

**துணை முடிவு :**

இவ்வாறே, $p > 1$ என்றால், $\int_1^\infty \cos x^p\, dx$ குவிகிறது என நிறுவலாம். குறிப்பாக,

$$\int_1^\infty \sin x^2\, dx, \int_1^\infty \cos x^2\, dx$$

என்ற இரு தொகைகளும் குவிகின்றன.

**ஒரு கந்தழித் தொடர் குவிகிறதா எனத் தகாத் தொகை மூலம் ஆராய்தல்**

$\Sigma a_n$ என்ற கந்தழித் தொடரின் உறுப்புகள் மிகை எண்களாகவும், இறங்கு வரிசையிலும் அமைந்திருந்தால், $n$-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $f(n) = a_n$ என்றவாறு, இடைவெளி $(1, \infty)$-ல் ஓர் இறங்கும் மிகை சார்பு $f(x)$ இருக்குமானால், $\int_1^\infty f(x)\,dx$ என்ற தகாத் தொகையுடன் $\Sigma a_n$ குவியும் அல்லது விரியும்.

$(n-1, n)$-ல்

$$(n-1) \leqslant x \leqslant n$$

$$\therefore \quad f(x) \geqslant f(n)$$

$$\geqslant a_n \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$(n, n+1)$-ல்

$$n \leqslant x \leqslant (n+1).$$

$$\therefore \quad f(n) \geqslant f(x)$$

$$a_n \geqslant f(x) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1), (2)-இவைகளிலிருந்து,

$$\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \geqslant \int_{n-1}^{n} a_n\,dx \geqslant \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx$$

$$\text{i.e.,} \quad \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \geqslant a_n \geqslant \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx$$

என அறியலாம்.

இதில் $n = n-1, n-2, \ldots\ldots 2$ என முறையே பிரதியிட,

$$\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \geqslant a_n \geqslant \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx$$

$$\int_{n-2}^{n-1} f(x)\,dx \geqslant a_{n-1} \geqslant \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx$$

$$\int_{1}^{2} f(x)\,dx \geqslant a_2 > \int_{2}^{3} f(x)\,dx$$

இவைகளைக் கூட்ட,

$$\int_{1}^{n} f(x)\,dx \geqslant \{ a_2 + a_3 + \dots + a_n \} \geqslant \int_{2}^{n+1} f(x)\,dx$$

$$A_n = \sum_{1}^{n} a_n \text{ என்க.}$$

$$\therefore \int_{1}^{n} f(x)\,dx \geqslant A_n - a_1 \geqslant \int_{2}^{n+1} f(x)\,dx.$$

எனவே $n$ கந்தழியை அணுகும்போது,

$\int_{1}^{n} f(x)\,dx$ குவியுமானல், $\{ A_n \}$ குவியும்.

$\int_{2}^{n+1} f(x)\,dx$, i.e., $\int_{1}^{n} f(x)\,dx$ விரியுமானல், $\{ A_n \}$ விரியும்.

i.e., $\Sigma\, a_n$ என்ற கந்தழித் தொடர்,

$\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$ உடன் விரியும் அல்லது குவியும்.

**துணைமுடிவு :** $I_n = \int_{1}^{n} f(x)\,dx$ என்ருல், $\{A_n - I_n\}$ என்ற தொடர் வரிசை (sequence) இறங்கும் சார்பாக இருக்கும். அது

$0, a_1$ ஆகிய இரண்டிற்கும் இடைப்பட்ட ஓர் எண்ணுக்குக் குவியும்.

**நிரூபணம் :**

$$(A_n - I_n) - (A_{n+1} - I_{n+1}) = (I_{n+1} - I_n) - (A_{n+1} - A_n)$$

$$= \int_n^{n+1} f(x)\,dx - a_{n+1} \geqslant 0$$

$$\therefore \quad (A_n - I_n) \geqslant (A_{n+1} - I_{n+1})$$

எனவே $\{ A_n - I_n \}$ இறங்கும் சார்பாகும்.

மேலும், $\int_1^n f(x)\,dx \geqslant A_n - a_1 \geqslant \int_2^{n+1} f(x)\,dx$

i.e., $I_n \geqslant A_n - a_1 \geqslant I_{n+1} - I_2$

$\geqslant I_n - 2I_2$ என அறிவோம்.

$\therefore \quad A_n - I_n \leqslant a_1$

$a_1 - I_2 \leqslant A_n - I_n.$

i.e., $a_1 \geqslant A_n - I_n \geqslant a_1 - I_2 > 0$

எனவே, $0, a_1$ ஆகியவற்றிற்கு இடைப்பட்ட ஒரு மதிப்பிற்கு, $\{ A_n - I_n \}$ குவிகிறது.

**எடுத்துக்காட்டு 1 :**

$\Sigma\, n^{-p}$ என்ற இசைத் தொடர்,

$p > 1$ என்றால் குவியும்.

$p \leqslant 1$ என்றால் விரியும்.

$f(x) = x^{-p}$ என்க.

$\therefore \quad f(n) = n^{-p}$

$(1, \infty)$-ல், $f(x)$ இறங்கும் மிகை சார்பாகும்.

எனவே $\Sigma\, n^{-p}$ என்ற கந்தழித் தொடர், $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ என்ற தகாத் தொகையுடன் குவியும் அல்லது விரியும்.

$p > 1$ என்றால் இத்தகாத் தொகை குவியும்.

$p \leqslant 1$ ,, ,, விரியும்.

எனவே $p > 1$ என்றால், $\Sigma n^{-p}$ குவியும்.

$p \leqslant 1$ ,, ,, விரியும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$$ எப்போது குவியும் என ஆராய்க.

$$f(x) = \frac{1}{x(\log x)^p}$$ என்க.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடர், $\int_2^{\infty} f(x)\, dx$ என்ற தகாத் தொகையுடன் குவியும் அல்லது விரியும்.

$$\int_2^{\infty} f(x)\, dx = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^p}$$

$t = \log x$ என்க.

$$\therefore \int_2^{\infty} f(x)\, dx = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{dt}{t^p}.$$

$p > 1$ என்றால் இத் தொகை குவியும்.

$p \leqslant 1$ ,, ,, விரியும்.

எனவே $p > 1$ என்றால், $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ குவியும்.

$p \leqslant 1$ ,, ,, விரியும்.

# 4. இரண்டாம் வகை தகாத் தொகைகள்

ஒரு முடிவுள்ள இடைவெளி $[a, b]$-ல் வரையறுக்கப்பட்ட $f(x)$ என்ற சார்பு, சில புள்ளிகளில் கந்தழியால் தொடர்ச்சியற்றது எனக் கொள்க.

தொடக்கத்தில், $x = a$ என்ற புள்ளியில் மட்டும், $f(x)$, கந்தழியால் தொடர்ச்சியற்றது என்க. அப் புள்ளியை நீக்கிய $(a+\xi, b)$-ல், (இங்கு $\xi > 0$ என்க.) $f(x)$, வரம்புள்ள, தொகைப்படத்தக்க சார்பாக இருக்கிறது. $\underset{\xi \to 0}{Lt} \int_{a+\xi}^{b} f(x)\,dx$ என்ற எல்லை மதிப்பு இருக்குமானல், அம் மதிப்பை $\int_a^b f(x)\,dx$ என வரையறுக்கிறோம்.

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \underset{\xi \to 0}{Lt} \int_{a+\xi}^{b} f(x)\,dx$$

தகாத் தொகை $\int_a^b f(x)\,dx$ அம் மதிப்பிற்குக் குவிகிறது என்கிறோம்.

$\underset{\xi \to 0}{Lt} \int_{a+\xi}^{b} f(x)\,dx = \pm\infty$ என்றால், தகாத்

தொகை $\int_a^b f(x)\,dx$, $\pm\ \infty$-க்கு விரிகிறது என்கிறோம்.

$\xi$ பூச்சியத்தை அணுகும்போது, $\int_{a+\xi}^{b} f(x)\,dx$ திட்டவட்டமான ஒரு மதிப்பை அடையாவிடில், $\int_a^b f(x)\,dx$ அலைவுறுகிறது என்கிறோம்.

இவ்வாறே, $x = b$-ல் $f(x)$, கந்தழியால் தொடர்ச்சியற்று இருப்பின், அப்புள்ளியை நீக்கிய $(a, b - \xi)$-ல் $f(x)$, வரம்புள்ள தொகைப்படுத்தக்தக்க சார்பாயின்,

$$\underset{\xi \to 0}{Lt} \int_a^{b-\xi} f(x)\,dx\text{-ன் எல்லை மதிப்பை,}$$

தகாத்தொகை $\int_a^b f(x)\,dx$ என வரையறுக்கிறோம்.

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \underset{\xi \to 0}{Lt} \int_a^{b-\xi} f(x)\,dx$$

தகாத்தொகை $\int_a^b f(x)\,dx$ அவ்வெல்லை மதிப்பிற்குக் குவிகிறது என்கிறோம். இத் தகாத்தொகையின் விரிவும் அலைவும் முன்போலவே வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன.

$[a, b]$-ல் $x = a, b$ ஆகிய இரு புள்ளிகளிலும் $f(x)$, கந்தழியால் தொடர்ச்சியற்றிருக்குமானல், $(a, b)$-யிலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $c$ என்றால், $\int_a^c f(x)\,dx$, $\int_c^b f(x)\,dx$ ஆகிய இரு தகாத்

தொகைகளும் குவியுமானுல், $\int_a^b f(x)\,dx$ குவிகிறது என்கிறேம்.

அதன் மதிப்பு $\int_a^c f(x)\,dx$, $\int_c^b f(x)\,dx$ ஆகியவற்றின் கூடுதலுக்குச் சமம்.

$$\text{i.e.}\quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$[a, b]$-ல் $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ஆகிய $n$ புள்ளிகளில், ($n$ ஒரு முடிவுள்ள எண்ணுக இருக்க வேண்டும்.) $f(x)$ கந்தழியால் தொடர்ச்சியற்றிருந்தால், $\int_a^b f(x)\,dx$-ன் மதிப்பு,

$$\int_a^{x_1} f(x)\,dx, \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx, \ \ldots \int_{x_n}^{b} f(x)\,dx$$

ஆகிய தகாத் தொகைகளின் கூடுதலுக்குச் சமம். (இத் தொகைகள் அனைத்தும் குவிய வேண்டும்.)

மேலும்,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_n}^{b} f(x)\,dx$$

$a < c < b$ என்க. புள்ளி $c$-ல் மட்டும் $f(x)$ தொடர்ச்சியற்றது என்க.

வரையறையின்படி,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$= \underset{\xi \to 0}{Lt} \int_{a}^{c-\xi} f(x)\, dx + \underset{\xi' \to 0}{Lt} \int_{c+\xi'}^{b} f(x)\, dx$$

சில வேளைகளில், இச் சமன்பாட்டின் வலப் புறத்திலுள்ள இரு எல்லை மதிப்புகளையும் தனித்தனியே கணக்கிட முடியாது. ஆயினும்,

$$\underset{\xi \to 0}{Lt} \left[ \int_{a}^{c-\xi} f(x)\, dx + \int_{c+\xi}^{b} f(x)\, dx \right]$$

என்ற எல்லை மதிப்பைக் கணக்கிடலாம். இம் மதிப்பிற்கு, தகாத் தொகை $\int_a^b f(x)\, dx$-ன் தலையாய மதிப்பு என்பது பெயர். இதனை, $P \int_a^b f(x)\, dx$ என எழுதுகிறோம்.

ஆனால், தகாத் தொகை $\int_a^b f(x)\, dx$ குவியவேண்டுமானால், தகாத் தொகைகள் $\int_a^c f(x)\, dx$ $\int_c^b f(x)\, dx$ என்ற இரண்டும்தனித் தனியே குவிய வேண்டும். $\int_a^b f(x)\, dx$-ன் தலையாய மதிப்பு மட்டும் இருந்தால் போதாது.

$\int_a^b f(x)\, dx$ குவியுமானால், அதன் பொது மதிப்பும், தலையாய மதிப்பும் சமமாகும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(i) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ குவிகிறது.

(ii) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ விரிகிறது.

(iii) $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}\, dx$ அலைவுறுகிறது.

(iv) $P \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0$

நிரூபணம் :

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x}$$

$$= \underset{\xi \to 0}{Lt} \int_{-1}^{-\xi} \frac{dx}{x} + \underset{\xi' \to 0}{Lt} \int_{\xi'}^1 \frac{dx}{x}$$

$$= Lt \int \frac{d(-x)}{(-x)} + Lt \int_{\xi'}^1 \frac{dx}{x}$$

$$= \underset{\xi \to 0}{Lt} \Big[\log(-x)\Big]_{-1}^{-\xi} + \underset{\xi' \to 0}{Lt} \Big[\log x\Big]_{\xi'}^1$$

$$= \underset{\xi \to 0}{Lt} \Big[\log \xi\Big] + \underset{\xi' \to 0}{Lt} \Big[-\log \xi'\Big]$$

$= -\infty + \infty$ (தேராதது.)

இவ்வாறு, $\xi$, $\xi'$ என்ற இரண்டும் தனித்தனியே பூச்சியத்தை அணுகும்போது, இந்த எல்லை மதிப்புகளைக் கணக்கிட முடியாது.

$\therefore \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ குவியவில்லை. ஆயினும் $\xi = \xi'$ எனக் கொண்டால்,

$$P\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \underset{\xi \to 0}{Lt} \; [\log \xi - \log \xi] = 0$$

(v) $\int_{-\pi/4}^{\pi/2} \cot x \, dx$ என்ற தகாத்தொகையில்,

$x = 0$-ல் $\cot x$ கந்தழியால் தொடர்ச்சியற்றது. இத் தொகை $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$-ல் குவியவில்லை. ஆயினும்,

$$P\int_{-\pi/4}^{\pi/2} \cot x \, dx = \log \sqrt{2}$$ என்பதை அறியலாம்.

**தகாத் தொகை $\int_a^b f(x)\,dx$-ன் குவிதல்**

சார்பு $f(x)$ ஒரு முடிவுள்ள இடைவெளியில் பல புள்ளிகளில் கந்தழியால் தொடர்ச்சியற்ற போதிலும், அந்த இடைவெளியை, $(a, b)$ போன்ற சிறு இடைவெளிகளாகப் பிரித்து, ஒவ்வொரு சிறு இடைவெளியிலும், ஒரே ஒரு புள்ளியில் ($a$-ல் அல்லது $b$-ல்) மட்டும், $f(x)$ தொடர்ச்சியற்றிருக்கும் வகையில் பிரிக்கலாம். அத்தகைய சிறு இடைவெளிகளில் கணிக்கப்படும் $\int_a^b f(x)\,dx$ போன்ற தகாத் தொகைகள் அனைத்தும் குவியுமாயின், கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளியில் $f(x)$-ன் தகாத் தொகையும் குவியும்

என்பதை அறிவோம். எனவே இரண்டாம் வகைத் தகாத் தொகைகளின் குவிதல் பற்றிச் சோதிக்க, $x = a$, அல்லது $x = b$ ஆகிய ஒரே ஒரு புள்ளியில் மட்டும், $f(x)$ தொடர்ச்சியற்றது எனக் கொள்ளலாம். இவ் வகைக்கு நிறுவப்படும் தேற்றங்களை மற்றவைகளுக்கு விரிவுபடுத்திக் கொள்ளலாம்.

கீழே, நிருபிக்கப்படும் தேற்றங்கள் அனைத்திலும் $x = a$ என்ற புள்ளியில் மட்டும் $f(x)$ கந்தழியால் தொடர்ச்சியற்றது எனக் கொள்க.

**குவிதலுக்கான கோஷியின் பொதுவிதி**

$\int_a^b f(x)\,dx$ என்ற தகாத் தொகை, $I$ என்றமதிப்பிற்குக் குவியுமானால், கொடுக்கப்பட்ட சிறு மிகை எண் $\in$-க்குத் தக்க $\eta$ என்ற ஒரு மிகை எண்ணை, $\eta$ ஐ விடக் குறைந்த $\xi$-ன் எல்லா மிகை மதிப்புகளுக்கும்,

$$\left| \int_{a+\xi}^{b} f(x)\,dx - I \right| < \in$$

என அமையுமாறு காணலாம்.

எனவே, $x = a$-ல் கந்தழித் தொடர்ச்சியற்ற $f(x)$-ன் தகாத் தொகை $\int_a^b f(x)\,dx$ குவிதலுக்குத் தேவையான அல்லது போதுமான நிபந்தனையாவது: கொடுக்கப்பட்ட மிகை எண் $\in$-க்குத் தக்க, ஒரு மிகை எண் $\eta$ ஐ, $\eta$ ஐ விடக் குறைந்த $\xi'$, $\xi''$-ன் எல்லா மிகை மதிப்புகளுக்கும்,

$$\left| \int_{a+\xi'}^{a+\xi''} f(x)\,dx \right| < \in \qquad (\xi' < \xi'' \text{ என்க.})$$

என அமையுமாறு காணலாம்.

**நிபந்தனை தேவையானது**

$\int_a^b f(x)\,dx$ என்ற தகாத் தொகை $I$ எனும் மதிப்பிற்குக் குவிகிறது என்க. எனவே, கோஷியின் பொது விதிப்படி, $\epsilon$-க்குத் தக்க, $\eta$ எனும் ஒரு மிகை எண்ணை, $\eta$ ஐ விடக் குறைந்த $\xi$-ன் அனைத்து மிகை மதிப்புகளுக்கும்,

$$\left| \int_{a+\xi}^{b} f(x)\,dx - I \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

என அமையுமாறு காணலாம்.

$$\therefore \int_{a+\xi'}^{a+\xi''} f(x)\,dx = \int_{a+\xi'}^{b} f(x)\,dx - \int_{a+\xi''}^{b} f(x)\,dx$$

$$\left| \int_{a+\xi'}^{a+\xi''} f(x)\,dx \right| \leqslant \left| \int_{a+\xi'}^{b} f(x)\,dx - I \right| + \left| \int_{a+\xi''}^{b} f(x)\,dx - I \right|$$

$\therefore \quad 0 < \xi' < \xi'' \leqslant \eta$ என்றால்,

$$\left| \int_{a+\xi'}^{a+\xi''} f(x)\,dx \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\xi}{2}$$

$$< \epsilon.$$

**நிபந்தனை போதுமானது**

$0 < \xi' < \xi'' \leqslant \eta$ என்றால்,

$$\left| \int_{a+\xi'}^{a+\xi''} f(x)\,dx \right| < \epsilon$$ எனக் கொள்க.

$$\text{i.e.,} \quad \left| \int_{a+\xi'}^{b} f(x)\, dx - \int_{a+\xi''}^{b} f(x)\, dx \right| < \epsilon$$

i.e., $a + \xi''$ ஐ நிலையான புள்ளியாகக் கொண்டால்,

$$\int_{a+\xi''}^{b} f(x)\, dx - \epsilon < \int_{a+\xi'}^{b} f(x)\, dx < \int_{a+\xi''}^{b} f(x)\, dx + \epsilon$$

எனக் கிடைக்கிறது.

$\xi''$ ஐ விடக் குறைந்த, $\xi'$-ன் அனைத்து மிகை மதிப்புகளுக்கும் இச் சமமின்மை பொருந்தும்.

எனவே, $\underset{\xi' \to 0}{Lt} \int_{a+\xi'}^{b} f(x)\, dx$-ன் எல்லை மதிப்பைக் கணக்கிட இயலும்.

$$\text{i.e.,} \quad \int_{a}^{b} f(x)\, dx \text{ குவிகிறது.}$$

**துணை முடிவு**

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{a}^{a+\xi} f(x)\, dx + \int_{a+\xi}^{a} f(x)\, dx.$$

எனவே, தகாத்தொகை $\int_{a}^{b} f(x)\, dx$ குவியும்போது,

$0 < \xi \leqslant \eta$ என்றால்,

$$\left| \int_{a}^{b} f(x)\, dx - \int_{a+\xi}^{b} f(x)\, dx \right| < \epsilon$$

$$\therefore \left| \int_a^{a+\xi} f(x)\,dx \right| < \epsilon$$

-மாருக, $0 < \xi < \eta$ என்றமைந்த $\xi$-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும்

$$\left| \int_a^{a+\xi} f(x)\,dx \right| < \epsilon \text{ என்ருல்,}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ குவியும்.}$$

**குறிப்பு :** $[a, b]$-லுள்ள ஒரு புள்ளி $x = c$-ல் $(a < c < b$ என்க.) சார்பு $f(x)$, வரம்பற்றது என்க. ஆயினும், அதன் மூலத்தொகை $\phi(x)$, $(a, b)$-ல் தொடர்ச்சியான சார்பாயின்,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \phi(b) - \phi(a).$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underset{\xi \to 0}{Lt} \int_a^{c-\xi} f(x)\,dx + \underset{\xi' \to 0}{Lt} \int_{c+\xi'}^{b} f(x)\,dx$$

$$= \underset{\xi \to 0}{Lt} [\phi(c-\xi) - \phi(a)]$$

$$+ \underset{\xi' \to 0}{Lt} [\phi(b) - \phi(c+\xi'')]$$

$$= [\phi(c-0) - \phi(a)] + [\phi(b) - \phi(c+0)]$$

$\phi(x)$, தொடர்ச்சியான சார்பாதலின்,

$$\phi(c-0) = \phi(c) = \phi(c+0).$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \phi(b) - \phi(a).$$

எடுத்துக்காட்டு :

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}} = \left[ 3x^{\frac{1}{3}} \right]_{-1}^{1} = 6$$

$x = 0$-ல் $\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$ கந்தழித் தொடர்ச்சியற்றது. எனினும், இதன் மூலத்தொகை $3x^{\frac{1}{3}}$ தொடர்ச்சியான சார்பாகும்.

**அறுவே குவிதல்** (Absolute convergence)

$\int_a^b | f(x) | dx$ குவியுமானல், தகாத்தொகை $\int_a^b f(x)\, dx$ அறுவே குவிகிறது என்கிரேம்.

$$\left| \int_{a+\xi'}^{a+\xi''} f(x)\, dx \right| \leqslant \left| \int_{a+\xi'}^{a+\xi''} | f(x) |\, dx \right|$$ ஆதலால்,

$\int_a^b | f(x) | dx$ குவியுமாயின், $\int_a^b f(x)\, dx$-ம் குவியும்.

ஆனல், $\int_a^b f(x)\, dx$ குவியும் போதெல்லாம், $\int_a^b | f(x) | dx$-ம் குவியும் எனக் கூற இயலாது.

எடுத்துக்காட்டு

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\, dx$$ குவிகிறது.

ஆனல், $\int_0^1 \frac{1}{x} \left| \sin \frac{1}{x} \right| dx$ விரிகிறது.

**நிருபணம் :**

$x = \frac{1}{y}$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\, dx = \int_1^\infty \frac{\sin y}{y}\, dy.$$

இத் தகாத் தொகை அறவே குவியவில்லை என்பதை அறிவோம்.

**குவிதலுக்கான சோதனைகள்**

**தேற்றம் 1 :**

$(a+\xi, b)$-ல் $f(x)$ ஒரு மிகை சார்பாயின், $\int_{a+\xi}^{b} f(x)\, dx$ என்ற தொகை, $\xi$-ல் ஓர் ஏறும் சார்பாக இருக்கும். எனவே, இத் தொகை குவியலாம் அல்லது விரியலாம். (அலைவுற முடியாது) $0 < \xi \leqslant \eta$ என்றமைந்த, $\xi$-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும்,

$\int_{a+\xi}^{b} f(x)\, dx$-க்கு ஒரு மேல் வரம்பு இருப்பின்,

i.e., $\int_{a+\xi}^{b} f(x)\, dx < K$ என அமையின், $\int_{a}^{b} f(x)\, dx$,

குவியும். $\int_{a+\xi}^{b} f(x)\, dx$ -க்கு மேல் வரம்பு இல்லாவிடில், $\int_{a}^{b} f(x)\, dx$ கந்தழிக்கு விரியும்.

**தேற்றம் 2 : ஒப்பீட்டுச் சோதனை**

$(a+\xi, b)$ -ல் வரம்புள்ள, தொகைப் படத்தக்க இரு மிகை சார்புகள், $f(x)$, $g(x)$ என்க.

(i) $(a, b)$ -ல் $g(x) \leqslant f(x)$ என்ருல் தனித் தொகை $\int_{a}^{b} f(x)\, dx$ குவியுமானல்,

$\int_a^b g(x)\,dx$-ம் குவியும்.

மேலும் $\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx.$

(ii) $(a, b)$-ல் $g(x) \geqslant f(x)$ என்றால் $\int_a^b f(x)\,dx$, கந்தழிக்கு விரியுமானால், $\int_a^b g(x)\,dx$-ம் கந்தழிக்கு விரியும்.

குறிப்பு : இத் தேற்றத்தைக் கீழ்க்கண்ட முறையிலும் எழுதலாம்.

(i) $\underset{x \to a}{Lt} \dfrac{g(x)}{f(x)} =$ ஒரு முடிவுள்ள எண் என்றால்,

$\int_a^b f(x)\,dx$ உடன், $\int_a^b g(x)\,dx$-ம் குவியும்.

(ii) $\underset{x \to a}{Lt} \dfrac{g(x)}{f(x)} =$ ஒரு முடிவுள்ள, பூச்சியத்திற்கு சமமில்லாத எண் என்றால்,

$\int_a^b f(x)\,dx$ உடன், $\int_a^b g(x)\,dx$-ம் விரியும்.

$\underset{x \to a}{Lt} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$ என்றால், இச் சோதனையைப் பயன்படுத்த முடியாது.

ஒப்பீட்டுச் சோதனையைப் பயன்படுத்த கீழ் காணும், தகாத் தொகையை அறிந்து வைப்பது பயனுள்ளதாகும்.

$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\mu}$ என்ற தகாத் தொகை,

$\mu < 1$ என்றால், குவியும்.

$\mu \geqslant 1$ என்றால், கந்தழிக்கு விரியும்.

$\mu \neq 1$ என்றால்,

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\mu} = \underset{\xi \to 0}{Lt} \int_{a+\xi}^b \frac{dx}{(x-a)^\mu}$$

$$= \underset{\xi \to 0}{Lt} \left[ \frac{1}{1-\mu} \left\{ (b-a)^{1-\mu} - \xi^{1-\mu} \right\} \right]$$

$$= \frac{(b-a)^{1-\mu}}{1-\mu} \quad (0 < \mu < 1 \text{ என்றால்})$$

$$= \infty \quad (\mu > 1 \text{ என்றால்})$$

$\mu = 1$ என்றால்,

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\mu} = \underset{\xi \to 0}{Lt} \left[\log(b-a) - \log \xi\right]$$

$$= +\infty$$

இவ்வாது $\mu < 1$ என்றால் மட்டுமே $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\mu}$ குவிகிறது.

$\mu \geqslant 1$ என்றால், இத் தொகை விரிகிறது.

**குறிப்பு 1 :** $\mu \leqslant 0$ என்றால், இத் தொகை ஒரு தகு தொகையாக (proper integral) மாறும். எனவே குவியும்.

**குறிப்பு 2 :** இத் தகாத் தொகையைப் பயன்படுத்தி ஒப்பீட்டுச் சோதனையைப் புதிய அமைப்பில் மாற்றி எழுதலாம்.

**குவிதலுக்கான சோதனை**

$\xi > 0$ என்க. $(a+\xi, b)$-ல் வரம்புள்ள, தொகைப் படுத்தத் தக்க சார்பு $f(x)$ என்றால், $0 < \mu < 1$ என்றமைந்த $\mu$-ன் எந்த மதிப்பிற்கும், $(a < x \leqslant b)$-ல் $\{(x-a)^{\mu} f(x)\}$ வரம்புள்ள சார்பாயின், $\int_a^b f(x)\,dx$ என்ற தகாத்தொகை, அறவே குவியும்.

$$\left\{(x-a)^{\mu} f(x)\right\}, \text{ வரம்புள்ள சார்பாதலின்,}$$

$(a < x \leqslant b)$-ல் $\left|(x-a)^{\mu} f(x)\right| < K$ என அமையும்.

$$|f(x)| < \frac{K}{(x-a)^{\mu}} \qquad (\because \ x > a)$$

$$\therefore \int_a^b |f(x)|\,dx < K \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\mu}}$$

$$\mu < 1 \text{ ஆதலால், } \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\mu}} \text{ குவிகிறது.}$$

$$\therefore \int_a^b |f(x)|\,dx \text{ குவிகிறது.}$$

$$\text{i.e., } \int_a^b f(x)\,dx \text{ அறவே குவிகிறது.}$$

**நடைமுறை விதி**

$(a < x \leqslant b)$-ல் $\underset{x \to a+0}{Lt} \left\{(x-a)^{\mu} f(x)\right\} =$ ஒரு முடிவுள்ள எண்ணானால், $\left\{(x-a)^{\mu} f(x)\right\}$ வரம்புள்ள சார்பாக அமையும்.

$$\therefore \quad \mu < 1 \text{ என்றால், } \int_a^b f(x)\,dx \text{ அறவே குவியும்.}$$

விரிதலுக்கான சோதனை

$\xi > 0$ என்க. $(a+\xi, b)$-ல் வரம்புள்ள, தொகைப்படுத்தத் தக்க சார்பு $f(x)$ என்க. $\mu \geqslant 1$ என்றமைந்த $\mu$-ன் எந்த மதிப்பிற்கும், $(a < x \leqslant b)$-ல் $\{(x-a)^{\mu} f(x)\}$-ன் கீழ்வரம்பு, ஒரு மிகை எண்ணானால், $\int_a^b f(x)\,dx$ என்ற தகாத் தொகை, $+\infty$-க்கு விரியும். $\{(x-a)^{\mu} f(x)\}$-ன் மேல் வரம்பு ஒரு குறை எண்ணானால், $\int_a^b f(x)\,dx$, $+\infty$-க்கு விரியும்.

$(x-a)^{\mu} f(x)$-ன் கீழ் வரம்பு $(L)$, ஒரு மிகை எண் என்க.

$$\therefore \quad (a < x \leqslant b)\text{-ல் } (x-a)^{\mu} f(x) > L > 0$$

என அமையும்.

$$\therefore f(x) > \frac{L}{(x-a)^{\mu}} > 0$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx > L \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\mu}}$$

$$\mu \geqslant 1 \text{ ஆதலால், } \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\mu}}, \; +\infty\text{-க்கு விரிகிறது.}$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx, \; +\infty\text{-க்கு விரிகிறது.}$$

$\{ (x-a)^{\mu} f(x) \}$ -ன் மேல் வரம்பு, ஒரு குறை எண்ணுனால்,
$\{ -(x-a)^{\mu} f(x) \}$ -ன் கீழ் வரம்பு ஒரு மிகை எண்ணுகும்.

$$\therefore \int_a^b - f(x)\, dx, \quad + \infty \text{-க்கு விரியும்.}$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\, dx, \quad - \infty \text{-க்கு விரியும்.}$$

**நடைமுறை விதி**

$(a < x \leqslant b)$-ல் $\underset{x \to a+0}{Lt} (x-a)^{\mu} f(x) =$ ஒரு முடிவுள்ள, பூச்சியத்திற்குச் சமமல்லாத எண் $(l)$ என்க.

$l > 0$ என்ருல், $\left\{ (x-a)^{\mu} f(x) \right\}$-ன் கீழ் வரம்பு ஒரு மிகை எண்ணுக அமையும்.

$l < 0$ என்ருல், $\left\{ (x-a)^{\mu} f(x) \right\}$-ன் மேல் வரம்பு ஒரு குறை எண்ணுக அமையும்.

எனவே, $\mu \geqslant 1$ என்ற மதிப்பிற்கு,

$$l > 0 \text{ என்ருல், } \int_a^b f(x)\, dx, \quad + \infty \text{-க்கு விரியும்.}$$

$$l < 0 \text{ என்ருல், } \int_a^b f(x)\, dx, \quad - \infty \text{-க்கு விரியும்.}$$

குறிப்பு : $l = 0$ என்ருல், இச் சோதனையைப் பயன்படுத்த முடியாது.

## எடுத்துக்காட்டுகள்

### எடுத்துக்காட்டு 1

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{3}}} \text{ குவிகிறது.}$$

$x = 0,\ 1$ ஆகிய புள்ளிகளில், $f(x) = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{3}}}$ கந்தழியால் தொடர்ச்சியற்றது.

$0 < a < 1$ என்க.

$$\therefore\ I = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^1 f(x)\,dx$$

$$= I_1 + I_2 \text{ என்க.}$$

$I_1$-ல் $\displaystyle Lt_{x \to 0}\, x^{\frac{1}{2}} f(x) = 1. \quad \tfrac{1}{2} < 1$

$\therefore\ I_1$ குவிகிறது.

$I_2$-ல் $\displaystyle Lt_{x \to 1}(1-x)^{\frac{1}{3}} f(x) = 1. \quad \tfrac{1}{3} < 1$

$\therefore\ I_2$ குவிகிறது.

$$\therefore\ \int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{3}}} \text{ குவிகிறது.}$$

### எடுத்துக்காட்டு 2

$$\int_0^1 \frac{dx}{x(1+x)} \text{ விரிகிறது.}$$

$x = 0$-ல், $f(x) = \dfrac{1}{x(1+x)}$ கந்தழியால், தொடர்ச்சியற்றது.

$$\underset{x \to 0}{Lt}\ x' f(x) = 1.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x(1+x)}$$ விரிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3

$-1 < p < 1$ என்றால்,

$$\int_0^1 \left(x^p + \frac{1}{x^p}\right) \frac{\log(1+x)}{x}\, dx$$ குவிகிறது.

$x = 0$-ல் தொகை சார்பு, கந்தழியால் தொடர்ச்சியற்றது.

$0 \leqslant p$ என்றால்,

$$\underset{x \to 0}{Lt}\ x^p f(x) = \underset{x \to 0}{Lt}\ (x^{2p} + 1)\ \frac{\log(1+x)}{x}$$

$$= 1.$$

$\therefore\ p < 1$ என்றால் இத் தொகை குவியும்.

$p < 0$ என்றால்,

$$\underset{x \to 0}{Lt}\ x^{-p} f(x) = \underset{x \to 0}{Lt} \left(1 + \frac{1}{x^{2p}}\right) \frac{\log(1+x)}{x}$$

$$= 1.$$

$\therefore\ -p < 1$ i.e., $p > -1$ என்றால் இத் தொகை குவிகிறது.

இவ்வாறு $-1 < p < 1$ என்றால், கொடுக்கப்பட்ட தொகை குவிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}\, dx$$ குவிகிறது என நிறுவுக.

$x = 0$-ல் தொகை சார்பு $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\tan x}}$

கந்தழியால் தொடர்ச்சியற்றது.

$$\underset{x \to 0}{Lt}\ x^{\frac{1}{2}} f(x) = \underset{x \to 0}{Lt} \sqrt{\frac{x}{\tan x}}$$

$$= \underset{x \to 0}{Lt} \sqrt{\frac{x}{\sin x}} \cdot \sqrt{\cos x} = 1$$

$$\therefore \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$$ குவிகிறது.

**எடுத்துக்காட்டு 5**

$n < m + 1$ என்றால், $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^m \operatorname{cosec}^n x\, dx$ குவிகிறது என நிறுவுக.

$f(x) = x^m \operatorname{cosec}^n x$ என்க.

$$= \frac{x^m}{\sin^n x}$$

$$= \left(\frac{x}{\sin x}\right)^n \cdot x^{m-n} \text{ அல்லது } \left(\frac{x}{\sin x}\right)^n \cdot \frac{1}{x^{n-m}}$$

$m \geqslant n$ என்றால், $f(x)$, தொடர்ச்சியான சார்பாகும்.

$m < n$ என்றால் மட்டுமே, $x = 0$-ல் $f(x)$ கந்தழியால் தொடர்ச்சியற்றது.

$m < n$ ஆக இருக்கும்போது,

$$\underset{x \to 0}{Lt}\ x^{n-m} f(x) = 1.$$

$\therefore$ $n - m < 1$ என்றால், i.e. $n < m + 1$ என்றால், இத் தகாத் தொகை குவியும்.

i.e. $n \leqslant m$ என்றால், தொகை, தகு தொகையாகிறது.

எனவே, $n < m + 1$ என்றால், $\int_0^{\pi/2} x^m \operatorname{cosec}^n x \, dx$ குவிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 6

$$\int_0^1 \log x \, dx \text{ குவிகிறது.}$$

$x = 0$-ல் $f(x) = \log x$, கந்தழியால் தொடர்ச்சியற்றது. $\alpha$, $\beta$ என்பன எவையேனும் இரண்டு மிகை எண்கள் என்றால்,

$$\underset{x \to 0}{Lt} \; x^{\alpha} (\log x)^{\beta} = 0 \text{ என்பதை அறிவோம்.}$$

$\mu = \frac{1}{2}$ என எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\underset{x \to 0}{Lt} \; x^{\frac{1}{2}} \log x = 0. \qquad \frac{1}{2} < 1.$$

$$\therefore \int_0^1 \log x \, dx \text{ குவிகிறது.}$$

எடுத்துக்காட்டு 7

$$\int_0^1 x^{n-1} \log x \, dx \text{ எப்போது குவியும் என ஆராய்க.}$$

$n - 1 > 0$ என்றால் $\underset{x \to 0}{Lt} \; x^{n-1} \log x = 0$.

எனவே, $f(x) = x^{n-1} \log x$, தொடர்ச்சியான சார்பாகும். எனவே இதன் தொகை, தகு தொகையாகும்.

$n-1=0$ என்றால், கொடுக்கப்பட்ட தொகை, $\int_0^1 \log x\, dx$ ஆகிறது. இத் தகாத் தொகை குவிகிறது என்பதை மேலே கண்டோம்.

$n-1<0$ என்றால், $x=0$ - ல் $f(x)$, கந்தழியால் தொடர்ச்சியற்ற சார்பாகும்.

$n-1<0$ என்றால்,

$$\underset{x\to 0}{Lt}\; x^{\mu} f(x) = \underset{x\to 0}{Lt}\; x^{\mu+n-1}\log x.$$

$$= 0 \qquad (\mu+n-1>0 \text{ என்றால்})$$

$$= -\infty \qquad (\mu+n-1\leqslant 0 \text{ என்றால்})$$

$0<\mu<1$ & $\mu>1-n$ என்றால், இத் தகாத் தொகை குவிகிறது.

i.e. $0<1-n<\mu<1$

i.e. $0<n<1$ என்றால், இத் தகாத் தொகை குவிகிறது.

$n\leqslant 0$ என்றால், இத் தகாத் தொகை விரியும்.

இவ்வாறு, கொடுக்கப்பட்ட தகாத் தொகை,

$n>0$ என்றால், குவியும்.

$n\leqslant 0$ என்றால், விரியும்.

**எடுத்துக்காட்டு 8**

$\int_0^{\pi/2} \log \sin x\; dx$ குவிகிறது.

$x=0$-ல் தொகை சார்பு, கந்தழியால் தொடர்ச்சியற்றது.

$$\log \sin x = \log\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot x\right\}$$

$$= \log \left\{ \left( \frac{\sin x}{x} \right) + \log x. \right.$$

$\therefore\ \mu = \frac{1}{2}$ என எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\underset{x \to 0}{Lt}\ x^{\frac{1}{2}} \log \sin x = \underset{x \to 0}{Lt}\ x^{\frac{1}{2}} \log \left( \frac{\sin x}{x} \right) + \underset{x \to 0}{Lt}\ x^{\frac{1}{2}} \log x$$

$$= 0.$$

$$\int_0^{\pi/2} \log \sin x\, dx \quad \text{குவிகிறது.}$$

**குறிப்பு:** இத் தகாத்தொகையின் மதிப்பு $\frac{1}{2} \log \frac{1}{2}$ என்பதை அறிவோம்.

**மேலும் சில சோதனைகள்**

**சோதனை 1:** தகாத் தொகை $\int_a^b f(x)\, dx$ அறவே குவியுமானால், $(a, b)$-ல் வரம்புள்ள, தொகைப்படுத்தத்தக்க சார்பு $g(x)$ என்றால், $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ அறவே குவியும்.

$(a, b)$-ல், $g(x)$ வரம்புள்ள சார்பாதலின்,

$$|\, g(x)\, | < K \quad \text{என அமையும்.}$$

$\int_a^b f(x)\, dx$, அறவே குவிதலின், $\epsilon$-க்குத் தக்க ஒரு மிகை எண் $\eta$ ஐ, $\xi' < \xi'' \leqslant \eta$ என்றமைந்த, $\xi' \cdot \xi''$ -ன் அனைத்து மிகை மதிப்புகளுக்கும்,

$$\int_{a+\xi'}^{a+\xi''} |f(x)|\, dx < \epsilon$$ எனக் காணலாம்.

$$\therefore \left| \int_{a+\xi'}^{a+\xi''} f(x)\, g(x)\, dx \right| < \int_{a+\xi'}^{a+\xi''} |f(x)| \cdot |g(x)|\, dx$$

$$< K \int_{a+\xi'}^{a+\xi''} |f(x)|\, dx$$

$$< K\epsilon$$

$$\therefore \int_a^b |f(x)| \cdot |g(x)|\, dx$$ குவிகிறது.

i.e., $$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$ அறவே குவிகிறது.

**ஆபெலின் சோதனை**

$\int_a^b f(x)\, dx$ என்ற தகாத்தொகை குவியுமானால், $(a, b)$-ல் வரம்புள்ள தொகைப்படுத்தத்தக்க, ஓரியல்புள்ள சார்பு $g(x)$ என்றால், தகாத்தொகை $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ குவியும்.

**திரிசிலேயின் சோதனை**

$\int_{a+\xi}^b f(x)\, dx$ ஒரு வரம்புள்ள சார்பாயின், $(a, b)$-ல் வரம்புள்ள தொகைப்படுத்தத்தக்க ஓரியல்புள்ள சார்பு $g(x)$ என்றால், $\underset{x \to a}{Lt}\, g(x) = 0$ என அமையின்,

தகாத்தொகை $\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx$ குவியும்.

இவ்விரு சோதனைகளையும், இரண்டாம் இடைமதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி நிறுவலாம்.

**எடுத்துக்காட்டுகள்**

**எடுத்துக்காட்டு 1**

$n$ ஒரு மிகை முழு எண் என்றால், $\int_0^{\pi/2} \cos 2nx \log \sin x\, dx$ குவிகிறது என நிறுவி, அதன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

$\int_0^{\pi/2} \log \sin x\, dx$ என்ற தகாத் தொகை, குவிகிறது.

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$-ல், $\cos 2nx$ வரம்புள்ள ஓரியல்பான சார்பாகும்.

எனவே, ஆபெலின் சோதனையின்படி $\int_0^{\pi/2} \cos 2nx \cdot \log \sin x\, dx$ குவிகிறது.

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos 2nx \log \sin x\, dx = \int_0^{\pi/2} \log \sin x \cdot d\left\{\frac{\sin 2nx}{2n}\right\}$$

$$= \left[\frac{1}{2n} \sin 2nx \cdot \log \sin x\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx \cos x}{\sin x}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx \cos x}{\sin x}\, dx.$$

$$\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x = \frac{\cos nx \,.\, \sin nx}{\sin x}$$

i.e., $$\sum_{r=1}^{n} \cos(2r-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}\,.$$

$$\therefore\; I = -\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\int_0^{\pi/2} \cos(2r-1)x \,.\, \cos x\, dx$$

$$= -\frac{1}{n}\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$$

$$-\sum_{r=2}^{n}\int_0^{\pi/2} \cos(2r-1)x \,.\, \cos x\, dx$$

இங்கே,

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2r-1)x \cos x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \{\cos 2rx + \cos 2(r-1)x\}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2rx}{2r} + \frac{\sin 2(r-1)x}{2(r-1)}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 0 \qquad (r > 2 \text{ என்றால்})$$

$$\therefore\; I = -\frac{1}{n}\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$$

$$= -\frac{1}{n}\,.\,\frac{1}{2}\,.\,\frac{\pi}{2}\,.$$

$$= -\frac{\pi}{4n}$$

துணைமுடிவு :

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2nx \,.\, \log \cos x \, dx = -\frac{\pi}{4n} \cos n\pi.$$

$y = \frac{\pi}{2} - x$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\therefore \quad I = \int_0^{\pi/2} \cos(n\pi - 2y\pi) \log \sin y \,.\, dy$$

$$= \cos n\pi \int_0^{\pi/2} \cos 2yn \,.\, \log \sin y \,.\, dy$$

$$= -\frac{\pi}{4n} \cos n\pi.$$

# 5. பொதுத் தகாத் தொகைகள்

முதல்வகை தகாத்தொகையில், இடைவெளி முடிவில்லாதது எனக் கொண்டோம். இரண்டாம் வகையில், தொகை சார்பு சில புள்ளிகளில் கந்தழியால் தொடர்ச்சியற்றது எனக் கொண்டோம். இவ்விரு வகைகளும் இணைந்து வரும் தகாத் தொகைகளை, பொதுத் தகாத் தொகைகள் (general improper integrals) என அழைக்கிறோம்.

முடிவில்லா இடைவெளியில், வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு சார்பு $f(x)$ என்க. இடைவெளியின் ஒரு பகுதி $(a, X)$-ல், $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ ஆகிய புள்ளிகளில், $f(x)$, கந்தழித் தொடர்ச்சியற்றது என்க.

$a < x_1 < x_2 < \ldots\ldots\ldots < x_n < X$ எனக் கொள்க.

இப்புள்ளிகளைத் தவிர, இடைவெளியின் பிற பகுதியில், $f(x)$, வரம்புள்ள, தொகைப்படத்தக்க சார்பாக அமையும். $x_n$, $X$-க்கு இடையில், ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $c$ ஐ எடுத்துக் கொள்க.

$\therefore x_n < c < X.$

தகாத்தொகையின் வரையறையின் படி,

$$\int_a^X f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots$$

$$\ldots + \int_{x_n}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{X} f(x)\,dx.$$

$$\int_a^{x_1} f(x)\,dx, \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx, \ldots \quad \int_{x_n}^{c} f(x)\,dx, \int_c^{\infty} f(x)\,dx$$

ஆகிய தகாத் தொகைகளில், இறுதியில் வரும் தகாத் தொகை, முதல் வகையைச் சார்ந்தது. மற்றவை, இரண்டாம் வகையைச் சார்ந்தவை. இத் தகாத்தொகைகள் அனைத்தின் கூடுதலை,

$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ என வரையறுத்துள்ளோம்.

$$\therefore \quad \int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots$$

$$\ldots + \int_{x_n}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx.$$

வலப்புறத்திலுள்ள தகாத் தொகைகள் அனைத்தும் குவியுமானால் பொதுத் தகாத் தொகை $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ குவிகிறது என்கிறோம்.

இவ்வாறே, பொதுத் தகாத் தொகை $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ ஐ வரையறுக்கிறோம்.

ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $c$ என்றால், $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$, $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ஆகிய இரு தொகைகளின் கூடுதலை $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ எனக் கூறுகிறோம்.

**எடுத்துக்காட்டுகள்**

**எடுத்துக்காட்டு 1**

$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx$, எப்போது குவிகிறது என ஆராய்க.

$x = 0$-ல் தொகை சார்பு, கந்தழியால் தொடர்ச்சியற்றிருக்கலாம்.

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx + \int_1^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx$$

$$= I_1 + I_2 \text{ என்க.}$$

$I_1$-ல், $\underset{x\to 0}{Lt}\ x^{1-p}\left\{\frac{x^{p-1}}{1+x}\right\} = 1.$

$1 - p < 1$ என்றால் $I_1$ குவியும்.

$1 - p \geqslant 1$ ,, $I_1$ விரியும்.

$\therefore\ p > 0$ என்றால் $I_1$ குவியும்.

$I_2$-ல், $\underset{x\to \infty}{Lt}\ x^{2-p}\left\{\frac{x^{p-1}}{1+x}\right\} = Lt\left(\frac{x}{1+x}\right)$

$$= 1.$$

$\therefore\ 2 - p > 1$ என்றால் $I_2$ குவியும்.

$2 - p \leqslant 1$ என்றால் $I_2$ விரியும்.

i.e., $p < 1$ என்றால் $I_2$ குவியும்.

$\therefore\ 0 < p < 1$ என்றால் மட்டுமே,

$I_1$, $I_2$ இரண்டும் குவியும்.

i.e., $0 < p < 1$ என்றால், $\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx$ குவிகிறது.

**எடுத்துக்காட்டு 2**

$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1-x}\, dx$ எப்போது குவிகிறது என ஆராய்க.

$$f(x) = \frac{x^{p-1}}{1-x}.$$

$x = 0, 1$ ஆகிய புள்ளிகளில், $f(x)$ கந்தழியால் தொடர்ச்சியற்றிருக்கலாம்.

$$I = \int_0^{\infty} f(x)\, dx = \int_0^{1/2} f(x)\, dx + \int_{1/2}^{1} f(x)\, dx + \int_1^{2} f(x)\, dx + \int_2^{\infty} f(x)\, dx$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$ என்க.

$I_1$-ல், $\underset{x \to 0}{Lt}\, x^{1-p} f(x) = 1.$

$\therefore$ $1 - p < 1$ என்றால், i.e., $p > 0$ என்றால், $I_1$ குவியும்.

$p \leqslant 0$ என்றால், $I_1$ விரியும்.

$I_2$-ல், $p$-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும்,

$$\underset{x \to 1}{Lt}\, (1 + x)'\, f(x) = 1.$$

$\therefore$ $p$-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $I_2$ விரிகிறது.

$I_2$ விரிவதால், $I_3$, $I_4$ குவியுமாயினும், $I$ விரியும்.

எனவே, $\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1-x}\, dx$ விரிகிறது.

**எடுத்துக்காட்டு 3**

$a \neq 0,\ b \neq 0$ என்றால், $\int_0^\infty \frac{\sin(ax+b)}{x^n}\,dx$ என்ற தகாத் தொகை, $0 < n < 1$ என்றுள்ள $n$-ன் மதிப்புகளுக்குக் குவியும் எனவும்,

$a \neq 0,\ b = 0$ என்றால், இத் தொகை $0 < n < 2$ என்றுள்ள $n$-ன் மதிப்புகளுக்குக் குவியும் எனவும் நிறுவுக.

$$f(x) = \frac{\sin(ax+b)}{x^n} \text{ என்க.}$$

$$\therefore\ I = \int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\sin(ax+b)}{x^n}\,dx + \int_1^\infty \frac{\sin(ax+b)}{x^n}\,dx$$

$$= I_1 + I_2 \text{ என்க.}$$

$a \neq 0,\quad b \neq 0$ என்றால்,

$$I_1\text{-ல்}\ \underset{x \to 0}{Lt}\ x^n = f(x) = \sin b$$

$\therefore\quad n < 1$ என்றால், $I_1$ குவியும்.

$I_2$-ல் $\int_1^\infty \sin(ax+b)\,dx$, ஒரு வரம்புள்ள சார்பாகும்.

$n > 0$ என்றால், $(1, \infty)$-ல், $\left\{\frac{1}{x^n}\right\}$ இறங்கும் சார்பாகும்.

$\underset{x \to \infty}{Lt} \left\{\frac{1}{x^n}\right\} = 0$. எனவே, திரிசிலேயின் சோதனையின் படி, $n > 0$ என்றால்,

$$\int_1^\infty \frac{\sin(ax+b)}{x^n}\,dx \text{ குவியும்.}$$

எனவே $0 < n < 1$ என்றால், $I_1$-ம், $I_2$-ம் குவியும்.

i.e., $\int_0^\infty \frac{\sin(ax+b)}{x^n}\,dx$ குவிகிறது.

$a \neq 0,\ b = 0$ என்றால்,

$$I = \int_0^1 \frac{\sin ax}{x^n}\,dx + \int_1^\infty \frac{\sin ax}{x^n}\,dx$$

திரிசிலேயின் சோதனையின் படி, $n > 0$ என்றால்,

$\int_1^\infty \frac{\sin ax}{x^n}\,dx$ குவியும்.

$$\int_0^1 \frac{\sin ax}{x^n}\,dx = \int_0^1 \frac{a}{x^{n-1}}\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)dx$$

$$\therefore \quad \underset{x \to 0}{Lt}\ x^{n-1} f(x) = a \neq 0$$

$\therefore \quad n - 1 < 1$ i.e., $n < 2$ என்றால்,

$\int_0^1 \frac{\sin ax}{x^n}\,dx$ குவிகிறது.

எனவே, $0 < n < 2$ என்றால், $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x^n}\,dx$ குவிகிறது.

# 6. ஃபுருல்லானியின் தொகை

**(Frullani's Intergal)**

$(0, \infty)$-ல், $\phi(x)$ ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பாயின், $\underset{x \to 0}{Lt}\, \phi(x) = \phi_0$, $\underset{x \to \infty}{Lt}\, \phi(x) = \phi_1$ என்ருல்,

$$\int_0^\infty \frac{\phi(ax) - \phi(bx)}{x}\, dx = (\phi_0 - \phi_1) \log \frac{b}{a}$$

($a$, $b$ இரு மிகை எண்களாகும்.)

$$I = \int_\xi^X \frac{\phi(ax) - \phi(bx)}{x}\, dx$$ என்ற தகு தொகையை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\text{இத்தொகை} = \int_\xi^X \frac{\phi(ax)}{x}\, dx - \int_\xi^X \frac{\phi(bx)}{x} dx$$

இரு தொகைகளிலும், முறையே, $t = ax$, $t = bx$ எனப் பிரதியிட,

$$I = \int_{a\xi}^{aX} \frac{\phi(t)}{t}\, dt - \int_{b\xi}^{bX} \frac{\phi(t)}{t}\, dt$$

$$= \int_{a\xi}^{b\xi} \frac{\phi(t)}{t}\, dt - \int_{aX}^{bX} \frac{\phi(t)}{t}\, dt$$

இவ்விரண்டு இடைவெளிகளிலும், $\phi(t)$, $\frac{1}{t}$ ஆகிய இரண்டும், வரம்புள்ள, தொகைப்படுத்தத் தக்க சார்புகளாகும். $\frac{1}{t}$ மிகை சார்பாக உள்ளது. (i.e., அதன் குறி மாறவில்லை.)

எனவே, முதல் இடை மதிப்புத் தேற்றத்தின்படி,

$$\int_{a\xi}^{b\xi} \frac{\phi(t)}{t}\, dt = \phi(\xi') \int_{a\xi}^{b\xi} \frac{dt}{t}$$

(இங்கு $a\xi \leqslant \xi' \leqslant b\xi$ என அமையும்)

$$= \phi(\xi') \log \frac{b}{a}$$

இவ்வாறே $\displaystyle\int_{aX}^{bX} \frac{\phi(t)}{t}\, dt = \phi(X') \int_{aX}^{bX} \frac{dt}{t}$

(இங்கு $aX \leqslant X' \leqslant bX$ என அமையும்)

$$= \phi(X') \log \frac{b}{a}$$

$$\therefore \int_{\xi}^{X} \frac{\phi(ax) - \phi(bx)}{x}\, dx = [\phi(\xi') - \phi(X')] \log \frac{b}{a}$$

$\therefore \quad \xi \to 0, X \to \infty$ என்றால்,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\phi(ax) - \phi(bx)}{x}\, dx = [\phi_0 - \phi_1) \log \frac{b}{a}.$$

குறிப்பு: $c > 0$ என்க.

தகாத் தொகை $\displaystyle\int_{0}^{c} \frac{\phi(x)}{x}\, dx$ குவியுமானால்,

$$\underset{\xi \to 0}{Lt} \int_{a\xi}^{b\xi} \frac{\phi(x)}{x}\, dx = 0.$$

இவ்வாறே $\int_{c}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx$ குவியுமானால்,

$$\underset{X \to \infty}{Lt} \int_{aX}^{bX} \frac{\phi(x)}{x} dx = 0.$$

$$\int_{\xi}^{X} \frac{\varphi(ax) - \phi(bx)}{x} dx = \int_{a\xi}^{b\xi} \frac{\phi(x)}{x} dx - \int_{aX}^{bX} \frac{\phi(x)}{x} dx$$

என நிறுவியுள்ளோம்.

மேற்கண்ட குறிப்பிலிருந்து, கீழ்க்கண்ட துணை முடிவுகளை நிறுவலாம்.

**துணை முடிவு 1**

$\int_{0}^{c} \frac{\phi(x)}{x} dx$ குவியுமானால் ($c > 0$ என்க.)

$\underset{x \to 0}{Lt} \phi(x) = \phi_1$ என்றால்,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\phi(ax) - \phi(bx)}{x} dx = -\phi_1 \log \frac{b}{a}$$

$$= \phi_1 \log \frac{a}{b}.$$

**துணை முடிவு 2**

$\int_{c}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx$ குவியுமானால்,

$\underset{x \to 0}{Lt} \phi(x) = \phi_0$ என்றால்,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\phi(ax) - \phi(bx)}{x} dx = \phi_0 \log \frac{b}{a}$$

துணை முடிவு 3 :

$$\int_0^c \frac{\phi(x)}{x}\,dx, \quad \int_0^\infty \frac{\phi(x)}{x}\,dx$$

ஆகிய இரு தகாத் தொகைகளும் குவியுமாயின்,

$$\int_0^\infty \frac{\phi(ax)-\phi(bx)}{x}\,dx = 0.$$

**எடுத்துக்காட்டுகள்**

**எடுத்துக்காட்டு 1**

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \log\frac{b}{a}$$

$\phi(x) = e^{-x}$ என்க.

$\phi(x)$ தொடர்ச்சியான சார்பாகும்.

$$\underset{x \to 0}{Lt}\ \phi(x) = 1, \quad \underset{x \to \infty}{Lt}\ \phi(x) = 0.$$

∴ ஃபுருல்லானியின் தேற்றத்தின்படி,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = (1-0)\log\frac{b}{a}$$

$$= \log\frac{b}{a}$$

**எடுத்துக்காட்டு 2**

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx = \log\frac{b}{a}$ என நிறுவுக. இதிலிருந்து,

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax \cdot \sin bx}{x}\,dx = \frac{1}{2}\log\left(\frac{a+b}{a-b}\right)$ எனக் காட்டு.

$\phi(x) = \cos x$ என்க.

இது தொடர்ச்சியான சார்பாகும்.

$c > 0$ என்றால், திரிசிலேயின் சோதனை மூலம்,

$\int_c^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ குவிகிறது என்பதைக் காணலாம்.

$$\underset{x \to 0}{Lt} \; \phi(x) = 1.$$

எனவே, துணைமுடிவு (2)-ன் படி,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx = 1 \log \frac{b}{a}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cdot \sin bx}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos(a-b)x - \cos(a+b)x}{x} dx$$

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{a+b}{a-b}\right)$$ (முந்தைய முடிவின் படி).

எடுத்துக்காட்டு 3

$$\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1} ax - \tan^{-1} bx}{x} dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{a}{b}$$

$\phi(x) = \tan^{-1} x$ என்க.

இது தொடர்ச்சியான சார்பாகும்.

$$\underset{x \to 0}{Lt} \; \phi(x) = 0 \qquad \underset{x \to \infty}{Lt} \; \phi(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1} ax - \tan^{-1} bx}{x} dx = \left(0 - \frac{\pi}{2}\right) \log$$

$$= -\frac{\pi}{2}\log\frac{b}{a}$$

$$= \frac{\pi}{2}\log\frac{a}{b}.$$

## பயிற்சி

I. (1) கீழ்க்கண்ட தகாத் தொகைகள், குவிகின்றனவா, விரிகின்றனவா என ஆராய்க :

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(a^2+x^2)^2}$ (ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}}\,dx}{b^2x^2+c^2}$

(iii) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ (iv) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}x^2\,dx.$

(v) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x\,dx}{1+x^2}$ (vi) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$

(2) கீழ்க்கண்ட தகாத் தொகைகள், குவிகின்றன என நிறுவுக.

(i) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\frac{\sin x}{x}\,dx$ (ii) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx$

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x}-e^{-x}\right)\frac{dx}{x}$

(iv) $\displaystyle\int_a^\infty (1-e^{-x})\frac{\cos x}{x}\,dx \quad (a>0)$

(3) $a>0$ என்றால்,

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

என நிறுவுக.

(4) $n > 0,\quad a > 0$ என்ருல்,

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x^{1+n}}\,dx,\quad \int_a^\infty \frac{\cos x}{x^{1+n}}\,dx$$

ஆகிய தொகைகள் அறவே குவியும் என நிறுவுக.

(5) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos mx\,dx}{a^2+x^2}$ அறவே குவிகிறது என நிறுவுக.

(6) $\displaystyle\int_0^\infty \left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{\sinh x}\right\}\frac{dx}{x}$ குவிகிறது என நிறுவுக.

II. (1) கீழ்க்கண்ட தகாத் தொகைகள் குவிகின்றனவா என்பதை ஆராய்க.

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ (ii) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^3-1}$

(iii) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ (iv) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{1-x}}$

(v) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\sin x}$ (vi) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)\sqrt{b-x}}$

(vii) $\displaystyle\int_0^1 \left\{\cos e^{\frac{1}{x}} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\sin e^{\frac{1}{x}}\right\} dx$

(viii) $\int_0^a \frac{\log x\, dx}{(1-x)}$ $(a < 1)$

(ix) $\int_0^1 \frac{\log x\, dx}{(1-x)^{\frac{1}{3}}}$

(x) $\int_0^1 \log x \cdot \log(1+x)\, dx.$

(2) $\int_0^{\pi/2} \sin x.\ \log \sin x\, dx = \log \frac{2}{e}$ என நிறுவுக.

(3) $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ குவிகிறதா என ஆராய்க.

(4) $\int_0^b \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x}\, dx$ அறவே குவியும் என நிறுவுக.

III. (1) கீழ்க்கண்ட தொகைகள் எப்போது குவியும் என ஆராய்க.

(i) $\int_1^{\infty} x^p (\log x)^q\, dx$ (ii) $\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1} - x^{n-1}}{1-x} dx$

(ii) $\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x} dx$ (iv) $\int_0^{\infty} x^{\alpha} (\sin x)^{\beta}\, dx$

(2) $\int_0^{\infty} e^{-a^2 x} \log \cos^2 x\, dx$ குவிகிறது என நிறுவுக.

(3) $n+1>0$ என்றால், $\int_0^{\infty} x^n e^{-a^2 x^2 - b^2/x^2} dx$

குவியும் என நிறுவுக.

(4) $a>0$ என்றால் $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{(\sin x)^{\frac{1}{3}}} dx$ குவியும் என நிறுவுக.

IV. கீழ்க்கண்ட முடிவுகளை நிறுவுக.

(1) $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = (b-a)\frac{\pi}{2}$

(2) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx} - (b-a)\,x\,e^{-bx}}{x^2}$

$$= (b-a) - a \log \frac{b}{a}$$

# 7. பீற்று, காமா சார்புகள்

## (Beta and Gamma Functions)

**பீற்று சார்பு**

$m > 0, \quad n > 0$ என்றால்,

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

என்ற தகாத் தொகை குவியும்.

$x = 0, 1$ ஆகிய புள்ளிகளில் $f(x) = x^{m-1}(1-x)^{n-1}$ கந்தழியால் தொடர்ச்சியற்றிருக்கலாம்.

$$\beta(m, n) = \int_0^{1/2} f(x)\,dx + \int_{1/2}^1 f(x)\,dx$$

$= I_1 + I_2$ என்போம்.

$m - 1 \geqslant 0$ என்றால், $I_1$ தகு தொகையாகும்.

$m - 1 < 0$ என்றால்,

$$\underset{x \to 0}{Lt}\; x^{1-m} f(x) = 1$$

$\therefore \quad 1 - m < 1 \quad$ i.e., $\quad m > 0$ என்றால், $n$-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும், $I_1$ குவியும்.

$n - 1 \geqslant 0$ என்றால், $I_2$ தகு தொகையாகும்.

$n - 1 < 0$ என்றால்,

$$\underset{x \to 1}{Lt}\; (1-x)^{1-n} f(x) = 1$$

$\therefore\ 1 - n < 1$ i.e., $n > 0$ என்ருல், $m$-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும், $I_2$ குவியும்.

எனவே, $m > 0$, $n > 0$ என்ருல், $I_1, I_2$ என்ற இரண்டும் குவியும்.

$$\therefore \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \text{ குவிகிறது.}$$

குறிப்பு : இத் தகாத் தொகையை, பீற்ரு சார்பு அல்லது ஆ(ய்)லரின் முதல் தகாத் தொகை (Euler's first integral) என அழைக்கிரும்.

பீற்ரு சார்பின் இயல்புகள்

I. இத் தகாத் தொகை அறவே குவிகிறது.

II. $\beta(m, n) = \beta(n, m)$

நிரூபணம் :

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

$x = 1 - y$ என்று பிரதியிடுக.

$$\therefore\ \beta(m, n) = \int_1^0 (1-y)^{m-1} y^{n-1}(-dy)$$

$$= \int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{m-1}\,dy$$

$$= \beta(n, m).$$

III. $\beta(m, n)$-ல், $x = \dfrac{1}{1+y}$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\therefore \quad \beta(m, n) = \int_{\infty}^{0} \frac{1}{(1+y)^{m-1}}\left(1 - \frac{1}{1+y}\right)^{n-1} \frac{-1}{(1+y)^2}\, dy$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{y^{n-1}\, dy}{(1+y)^{m+n}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

இதே மாதிரி, $\beta(m, n) = \int_{0}^{\infty} \frac{y^{m-1}\, dy}{(1+y)^{m+n}} \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$

எனவும் நிறுவலாம்.

இவை, பீற்ரு சார்பின் மற்ரோர் அமைப்பாகும்.

IV. $x = \cos^2\theta$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\therefore \quad \beta(m, n) = \int_{\pi/2}^{0} \cos^{2(m-1)}\theta \cdot \sin^{2(n-1)}\theta$$

$$\times\ 2\cos\theta\,(-\sin\theta)\, d\theta$$

$$= 2\int_{0}^{\pi/2} \sin^{2n-1}\theta \cdot \cos^{2m-1}\theta\, d\theta \quad \cdots \quad (3)$$

இவ்வாறே,

$$\beta(m, n) = 2\int_{0}^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cdot \cos^{2n-1}\theta\, d\theta \quad \cdots \quad (4)$$

எனவும் நிறுவலாம்.

இவைகளும் பீற்ரு சார்பின் ஓர் அமைப்பாகும்.

V. $\beta(m, n) = \beta(m+1, n) + \beta(m, n+1)$.

நிரூபணம்: $\beta(m, n) = \int_{0}^{1} x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx$

$$= \int_0^1 x^{m-1} (1 - x)^{n-1} (x + \overline{1 - x})\, dx$$

$$= \int_0^1 x^m (1 - x)^{n-1}\, dx + \int_0^1 x^{m-1} (1 - x)^n\, dx$$

$$= \beta (m + 1, n) + \beta (m, n + 1) \qquad \dots \qquad (5)$$

மேலும்

$$\beta (m + 1, n) = \int_0^1 x^m\, d \left\{ \frac{(1 - x)^n}{-n} \right\}$$

$$= \left[ \frac{x^m (1 - x)^n}{-n} \right]_0^1 + \frac{m}{n} \int_0^1 x^{m-1} (1 - x)^n\, dx$$

$$= \frac{m}{n} \beta (m, n + 1) \qquad \dots \qquad \dots \qquad (6)$$

எனவே, $\beta (m, n) = \left( \frac{m}{n} + 1 \right) \beta (m, n + 1)$

$$= \frac{m + n}{n} \beta (m, n + 1) \qquad \dots \qquad \dots \qquad (7)$$

இவ்வாறே $\beta (m, n) = \frac{m + n}{m} \beta (m + 1, n) \qquad \dots \qquad \dots \qquad (8)$

எனவும் நிறுவலாம்.

சமன்பாடு (7)-லிருந்து $\beta (m, n + 1) = \frac{n}{m + n} \beta (m, n)$.

$\therefore$ $n$ ஐ, $(n - 1)$ என மாற்றி எழுத,

$$\beta (m, n) = \frac{n - 1}{m + n - 1} \beta (m, n - 1)$$

எனக் கிடைக்கிறது.

எனவே, $n$ ஒரு மிகை முழு எண் என்றால்,

$$\beta(m, n) = \frac{(n-1)}{(m+n-1)} \cdot \frac{(n-2)}{(m+n-2)} \cdots$$
$$\cdots \frac{1}{m+1}\, \beta(m, 1)$$

இங்கு,

$$\beta(m, 1) = \int_0^1 x^{m-1}\, dn = \frac{1}{m}$$

$$\therefore \quad \beta(m, n) = \frac{(n-1)(n-2)}{(m+n-1)(m+n-2)} \cdots \frac{1}{(m+1)} \frac{}{m}$$

$$= \frac{\lfloor n-1}{m(m+1)\ldots(m+n-1)} \quad \ldots \quad (9)$$

இவ்வாறே, $m$ ஒரு மிகை முழு எண் என்றால்,

$$\beta(m, n) = \frac{\lfloor m-1}{n(n+1)\ldots(n+m-1)} \quad \ldots \quad (10)$$

குறிப்பாக, $m$, $n$ இரண்டுமே மிகை முழு எண்கள் என்றால்,

$$\beta(m, n) = \frac{\lfloor m-1 \cdot \lfloor n-1}{\lfloor m+n-1} \quad \ldots \quad \ldots \quad (11)$$

VI. $$\int_a^b (x-\ )^{m-1} (b-x)^{n-1}\, dx = (b-a)^{m+n-1}\, \beta(m, n) \ldots$$
$$\ldots \quad (12)$$

**நிரூபணம் :**

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1}\, dx$$

$$x = \frac{y-a}{b-a}$$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\therefore \quad \beta(m, n) = \int_a^b \frac{(y-a)^{m-1}}{(b-a)^{m-1}} \frac{(b-y)^{n-1}}{(b-a)^{n-1}} \cdot \frac{dy}{(b-a)}$$

$$= \frac{1}{(b-a)^{m+n-1}} \int_a^b (y-a)^{m-1} (b-y)^{n-1}\, dy.$$

i.e., $$\int_a^b (x-a)^{m-1} \cdot (b-x)^{n-1}\, dx = (b-a)^{m+n-1} \cdot \beta(m, n).$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1

$$\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^5}} = \frac{1}{5}\, \beta\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$$ என நிறுவுக.

$t = x^5$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\therefore \quad I = \int_0^1 t^{\frac{1}{5}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} \frac{dt}{5t^{\frac{4}{5}}}$$

$$= \frac{1}{5} \int_0^1 t^{-\frac{3}{5}} (1-t)^{-\frac{1}{2}}\, dt$$

$$= \frac{1}{5} \int_0^1 t^{\frac{2}{5}-1} (1-t)^{\frac{1}{2}-1}\, dt$$

$$= \frac{1}{5}\, \beta\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 2

$$\int_0^2 x^4 (8-x^3)^{-\frac{1}{3}}\, dx$$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$t = x^3$ என்க.

$$\therefore \quad I = \int_0^8 t^{\frac{4}{3}}(8-t)^{-\frac{1}{3}} \frac{dt}{3t^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^8 t^{\frac{2}{3}}(8-t)^{-\frac{1}{8}}\, dt$$

$$\text{i.e.,} \quad = \frac{1}{3} \int_0^8 (t-0)^{\frac{5}{3}-1}(8-t)^{\frac{2}{3}-1}\, dt$$

$$= \frac{1}{3}(8-0)^{\frac{5}{3}+\frac{2}{3}-1} \beta\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

(சார்பின் இயல்பில் VI-ம் அமைப்பில் உள்ளபடி)

$$= \frac{16}{3} \beta\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

**எடுத்துக்காட்டு 3**

$$\int_0^\infty \frac{x^8(1-x^6)}{(1+x)^{24}}\, dx = 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

$$I = \int_0^\infty \frac{x^8\, dx}{(1+x)^{24}} - \int_0^\infty \frac{x^{14}\, dx}{(1+x)^{24}}$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{9-1}\, dx}{(1+x)^{9+15}} - \int_0^\infty \frac{x^{15-1}\, dx}{(1+x)^{15+9}}$$

$$\beta(m, n) = \int_0^\infty \frac{y^{n-1}\, dy}{(1+y)^{m+n}} \text{ என்பதால்,}$$

$$I = \beta(9, 15) - \beta(15, 9)$$

$$= \beta(9, 15) - \beta(9, 15)$$

$$= 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 4

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx = \beta\,(m, n)$$ என நிறுவுக. $(m, n > 0)$

$$\beta\,(m, n) = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{(1+x)^{m+n}}$$ என அறிவோம்.

$$= \int_0^1 \frac{x^{m-1}\,dx}{(1+x)^{m+n}} + \int_1^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{(1+x)^{m+n}}$$

$= I_1 + I_2$ என்க.

$I_2$-ல் $x = \frac{1}{t}$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\therefore \quad I_2 = \int_1^0 \frac{t^{1-m}}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{m+n}} \frac{-1}{t^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t^{n-1}\,dt}{(1+t)^{m+n}}$$

$$\therefore \quad I = \int_0^1 \frac{x^{m-1}\,dx}{(1+x)^{m+n}} + \int_0^1 \frac{x^{n-1}\,dx}{(1+x)^{m+n}}$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx.$$

எடுத்துக்காட்டு 5

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{m-1} (\cos x)^{n-1}\,dx$$ எப்போது குவியும் என ஆராய்க.

$y = \sin x$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \quad I = \int_0^1 y^{m-1} (1 - y^2)^{\frac{n-1}{2}} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$$= \int_0^1 y^{m-1} (1 - y^2)^{\frac{n}{2} - 1} dy.$$

$u = y^2$ என்க.

$$\therefore \quad I = \int_0^1 u^{\frac{m-1}{2}} (1 - u)^{\frac{n}{2} - 1} \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 u^{\frac{m}{2} - 1} (1 - u)^{\frac{n}{2} - 1} du$$

$$= \frac{1}{2} \beta \left( \frac{m}{2}, \frac{n}{2} \right).$$

$$\frac{m}{2}, \frac{n}{2} > 0$$

i.e., $m, n > 0$ என்ருல் இத்தொகை குவியும்.

**காமா சார்பு**

$n > 0$ என்ருல், $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx$ என்ற தகாத் தொகை குவியும்.

$x = 0$-ல், $f(n) = e^{-x} x^{n-1}$, கந்தழியால் தொடர்ச்சியற்றிருக்கலாம்.

$$\Gamma(n) = \int_0^1 e^{-x} x^{n-1} dx + \int_1^\infty e^{-x} x^{n-1} dx$$

$= I_1 + I_2$ என்க.

$n-1 \geqslant 0$ என்றால், $I_1$ தகு தொகையாகும்.

$n-1 < 0$ என்றால்,

$$\underset{x \to 0}{Lt}\; x^{1-n} f(x) = 1.$$

$\therefore\;\; 1-n < 1$ i.e. $n > 0$ என்றால், $I_1$ குவியும்.

$I_2$-ல் $n$-ன் எந்த மதிப்பிற்கும்,

$$e^{x} < x^{n+1}$$

$$\therefore\;\; x^{n-1}\; e^{-x} < \frac{1}{x^2}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dn}{x^2} \text{ குவிகிறது.}$$

எனவே, $n$-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும்,

$$\int_1^{\infty} e^{-x}\, x^{n-1}\, dn \text{ குவிகிறது.}$$

$\therefore\;\; n > 0$ என்றால், $I_1$, $I_2$ ஆகிய இரண்டும் குவிகின்றன.

$$\therefore\;\; \int_0^{\infty} e^{-x}\, x^{n-1}\, dx \text{ குவிகிறது.}$$

குறிப்பு: இத்தகாத் தொகையை, காமா சார்பு அல்லது ஆ(ய்)லரின் இரண்டாம் தகாத்தொகை (Euler's second integral) என அழைக்கிறோம்.

**காமா சார்பின் இயல்புகள்**

I $\Gamma(n)$-ல், $x = ay$ எனப் பிரதியிடுக. ($a > 0$ என்க.)

$$\therefore\;\; \Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-ay}\, (ay)^{n-1}\, a\, dy$$

$$= a^n \int_0^\infty e^{-ay}\, y^{n-1}\, dy.$$

i.e., $$\int_0^\infty e^{-ax}\, x^{n-1}\, dx = \frac{\Gamma(n)}{a^n} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

*II.* $x = \log \frac{1}{y}$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$\Gamma(n) = \int_1^0 e^{-\log \frac{1}{y}} \left(\log \frac{1}{y}\right)^{n-1} y \left(\frac{-1}{y^2}\right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\log \frac{1}{y}\right)^{n-1} dy \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இது, காமா சார்பின் மற்ருேர் அமைப்பாகும்.

III. $$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^n\, dn$$

$$= \int_0^\infty x^n\, d(-e^{-x})$$

$$= \left[-x^n e^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\, n \, . \, x^{n-1}\, dn$$

$$= n\,\Gamma(n).$$

$$\therefore \quad \Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

எனவே, $n$ ஒரு மிகை முழு எண் ஆனுல்,

$$\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1)$$

$$= (n-1)(n-2)\,\Gamma(n-2)$$

$$= (n-1)(n-2) \ldots 2 \, . \, 1 \; \Gamma(1)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dn = 1.$$

$$\therefore \quad \Gamma(n) = (n-1)(n-2) \ldots 2.1$$

$$= \underline{|n-1} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

IV. $n = 0$ என்ருல், $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dn$ கந்தழிக்கு விரிகிறது.

எனவே, $\Gamma(0) = +\infty \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$

V. $x$ ஒரு குறை முழு எண்ணுகவோ (negative integar), பூச்சியமாகவோ இல்லாவிட்டால்,

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

என நிறுவலாம்.

**பீற்ரு, காமா சார்புகளின் உறவு**

$m > 0,\ n > 0$ என்ருல்,

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\, dn.$$

$$\therefore \quad \Gamma(m+n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{m+n-1}\, dn.$$

$x$-க்குப் பதிலாக, $ax$ என எழுத, ($a > 0$ என்க.)

$$\Gamma(m+n) = a^{m+n} \int_0^\infty e^{-ax} x^{m+n-1}\, dn$$

$a = 1 + y$ என்க.

$$\therefore \quad \Gamma(m+n) = (1+y)^{m+n} \int_0^\infty e^{-(1+y)x}\, x^{m+n-1}\, dn \quad \dots \quad (1)$$

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dn$$

$$x = \frac{1}{1+y}$$ எனப் பிரதியிட,

$$\beta(m, n) = \int_0^\infty \frac{y^{n-1}\, dy}{(1+y)^{m+n}}$$

$$= \int_0^\infty y^{n-1}\, dy.\ \frac{1}{\Gamma(m+n)} \int_0^\infty e^{-(1+y)x}\, x^{m+n-1}\, dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m+n)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(1+y)x}\, x^{m+n+1}\, y^{n-1}\, dn\, dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m+n)} \int_0^\infty e^{-x}\, x^{m-1}\, dx \left\{ x^n \int_0^\infty e^{-yx}\, y^{n-1}\, dy \right\}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m+n)}.\ \Gamma(m).\ \Gamma(n)$$

$$\text{i.e., } \beta(m, n) = \frac{\Gamma(m).\ \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

குறிப்பு: தெளிவான நிரூபணத்திற்கு, இருமாறித் தொகைகளைப் (double integral) பற்றி அறிந்திருக்க வேண்டும்.

**துணை முடிவு:**

$$\beta(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1}\theta.\ \sin^{2n-1}\theta\ d\theta.$$

$p = 2m - 1$, $q = 2n - 1$ எனப் பிரதியிட,

$$\int_0^{\pi/2} \cos^p \theta \sin^q \theta \; d\theta = \frac{1}{2} \beta \left( \frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}$$

இத்தகாத் தொகை குவிவதற்குரிய நிபந்தனை,

$m > 0$, $n > 0$ ஆகும்.

i.e., $\frac{p+1}{2} > 0$ ; $\frac{q+1}{2} > 0$

$p > -1$, $q > -1$ ஆகும்.

எனவே, $p = 0$, $q = 0$ எனப் பிரதியிடலாம்.

$$\therefore \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right\}^2$$

$$\therefore \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

**எடுத்துக்காட்டுகள்**

**எடுத்துகாட்டு 1**

$n > 0$ என்ருல்,

$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} \log x \, dn$ குவிகிறது என நிறுவுக.

$$I = \int_0^1 e^{-x} x^{n-1} \log x \, dx + \int_1^\infty e^{-x} x^{n-1} \log x \, dx$$

$$= I_1 + I_2 \text{ என்க.}$$

$I_1$-ல், $x = 0$-ல் தொகை சார்பு, கந்தழியால் தொடர்ச்சியற்றது.

$(0 < x < 1)$-ல், $| e^{-x} x^{n-1} \log x | \leqslant x^{n-1} \, | \log x |$

$n > 0$ என்றால் $\int_0^1 x^{n-1} \, | \log x | \, dx$ குவிகிறது என்பதை அறிவோம்.

$\therefore$ $n > 0$ என்றால், $\int_0^1 e^{-x} x^{n-1} \log x \, dx$ குவிகிறது.

$I_2$-ல், $x > 1$ ஆதலால்,

$$0 < \log x < x.$$

$$\therefore \quad e^{-x} x^{n-1} \log x < e^{-x} x^{n-1} \cdot x$$
$$< e^{-x} x^n.$$

$n > -1$ என்றால், $\int_1^\infty e^{-x} x^n \, dx$ குவிகிறது.

$\therefore$ $n > -1$ என்றால், $\int_1^\infty e^{-x} x^{n-1} \log x \, dx$ குவிகிறது.

$\therefore$ $n > 0$ என்றால், $I_1$, $I_2$ ஆகிய இரண்டும் குவிகின்றன.

i.e., $n > 0$ என்றால், $\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} \log x \, dx$ குவிகிறது.

**எடுத்துக்காட்டு 2**

$\int_1^\infty x^p (\log x)^q \, dx$ எப்போது குவியும் என ஆராய்க.

$x = e^y$ என்க.

$$\therefore \quad I = \int_1^\infty e^{py} y^q e^y \, dy$$

$$= \int_1^\infty e^{(p+1)y} y^q \, dy$$

$$= \int_0^\infty e^{(p+1)y} y^{(q+1)-1} \, dy$$

$a > 0$, $n > 0$ என்றால், $\int_1^\infty e^{-ax} x^{n-1} \, dx$ என்ற தகாத் தொகை $\frac{\Gamma(n)}{a^n}$ -க்குக் குவிகிறது என்பதை அறிவோம்.

$\therefore \; (p+1) > 0$, $(q+1) > 0$ என்றால், கொடுக்கப்பட்ட தகாத்தொகை குவிகிறது.

## பயிற்சி

**I.** (1) மதிப்பிடுக :

(i) $\int_0^\infty \frac{x^4 (1 + x^5)}{(1 + x)^{15}} \, dx$

(ii) $\int_0^1 \frac{(1 - x^4)^{\frac{3}{4}}}{(1 + x^4)^2} \, dx$

(iii) $\int_0^1 \frac{x^{-\frac{1}{3}}(1-x)^{-\frac{2}{3}}}{(1+2x)}\,dx$

(iv) $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{(a+bx)^{m+n}} = \frac{1}{a^n b^m}\,\beta(m, n)$

(2) கீழ்க்கண்ட முடிவுகளை நிறுவுக :

(i) $\int_0^1 x^{m-1}(1-x^2)^{n-1}\,dx = \frac{1}{2}\,\beta\left(\frac{m}{2}, n\right)$

(ii) $\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\,dx = \frac{1}{12}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right\}^2$

(iii) $p, q, m+1, n+1 > 0$ என்றால்,

$$\int_0^p x^m (p^q - x^q)^n\,dx = \frac{p^{qn+m+1}}{q}\,\beta\left(n+1, \frac{m+1}{q}\right)$$

(iv) $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} = 2\,\beta(m, n)$

(3) $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{m+1}(\log \sin x)^p\,dx$ எப்போது குவியும் என ஆராய்க.

# மேற்கோள் நூற்பட்டியல்


1. "An Introduction to the Theory of Fourier Series and Integrals"

—*By* H. S. CARSLAW.

2. "A Course of Analysis"

—*By* E. G. PHILLIPS.

3. "Mathematical Analysis"

—*By* GOODSTEIN.

4. "Advanced Calculus"

—*By* SOKOLNIKOFF.

5. "Mathematical Analysis"

—*By* A. RAMANATHAN.

6. "A Course of Mathematical Analysis"

—*By* SHANTHI NARAYANAN.

# கலைச்சொற்கள்

| | | |
|---|---|---|
| Approximate sum, upper | — | தோராய மேற்தொகை |
| Approximate sum, lower | — | தோராய கீழ்த்தொகை |
| Bound | — | வரம்பு |
| Constant | — | மாறிலி |
| Convergence | — | குவிதல் |
| Convergence, absolute | — | அறவே குவிதல் |
| Derivation | — | வகைப்படுதல் |
| Divergence | — | விரிதல் |
| Function | — | சார்பு |
| Function Continuous | — | தொடர்ச்சியான சார்பு |
| Function discontinuous | — | தொடர்ச்சியற்ற சார்பு |
| Function monotonic | — | ஓரியல்பு சார்பு |
| Function monotonic decreasing | — | இறங்கும் சார்பு |
| Function monotonic increasing | — | ஏறும் சார்பு |
| Function Beta | — | பீற்ரு சார்பு |
| Function Gamma | — | காமா சார்பு |
| Fundemental theorem | — | அடிப்படைத் தேற்றம் |
| Integration | — | தொகைப்படுத்தல் |
| Integral | — | தொகை |
| Integral double | — | இருமாறித்தொகை |
| Integral definite | — | வரையறுத்த தொகை |
| Integral indefinite | — | வரையருத் தொகை |
| Integral improper | — | தகாத்தொகை |
| Improper Integral of first kind | — | முதல்வகை தகாத்தொகை |
| Improper Integral of second kind | — | இரண்டாம் வகை தகாத் தொகை |
| Integral, upper Riemann | — | ரீமன் மேற்தொகை |
| Integral, lower Riemann | — | ரீமன் கீழ்தொகை |
| Frullan's Integral | — | ஃபுருல்லானியின் தொகை |
| Interval | — | இடைவெளி |

| | | |
|---|---|---|
| Interval closed | — | மூடிய இடைவெளி |
| Interval finite | — | முடிவுள்ள இடைவெளி |
| Interval infinite | — | முடிவில்லா இடைவெளி |
| Interval sub-interval | — | சிறு இடைவெளி |
| Mean value Theorem | — | இடைமதிப்புத் தேற்றம் |
| Mode of division | — | பகுப்பு முறை |
| Mode consecutive | — | அடுத்துள்ள பகுப்பு முறை |
| Oscillation | — | அலைவுறல் |
| Points of division | — | பகுப்புப் புள்ளிகள் |
| Points set of | — | புள்ளி கணம் |
| primitive | — | மூலத்தொகை |
| Primitive complete | — | முழு மூலத்தொகை |
| Rectangles, inner | — | உட்செவ்வகங்கள் |
| Rectangles outer | — | வெளி செவ்வகங்கள் |
| Value, general | — | பொது மதிப்பு |
| Value principal | — | தலையாய மதிப்பு |